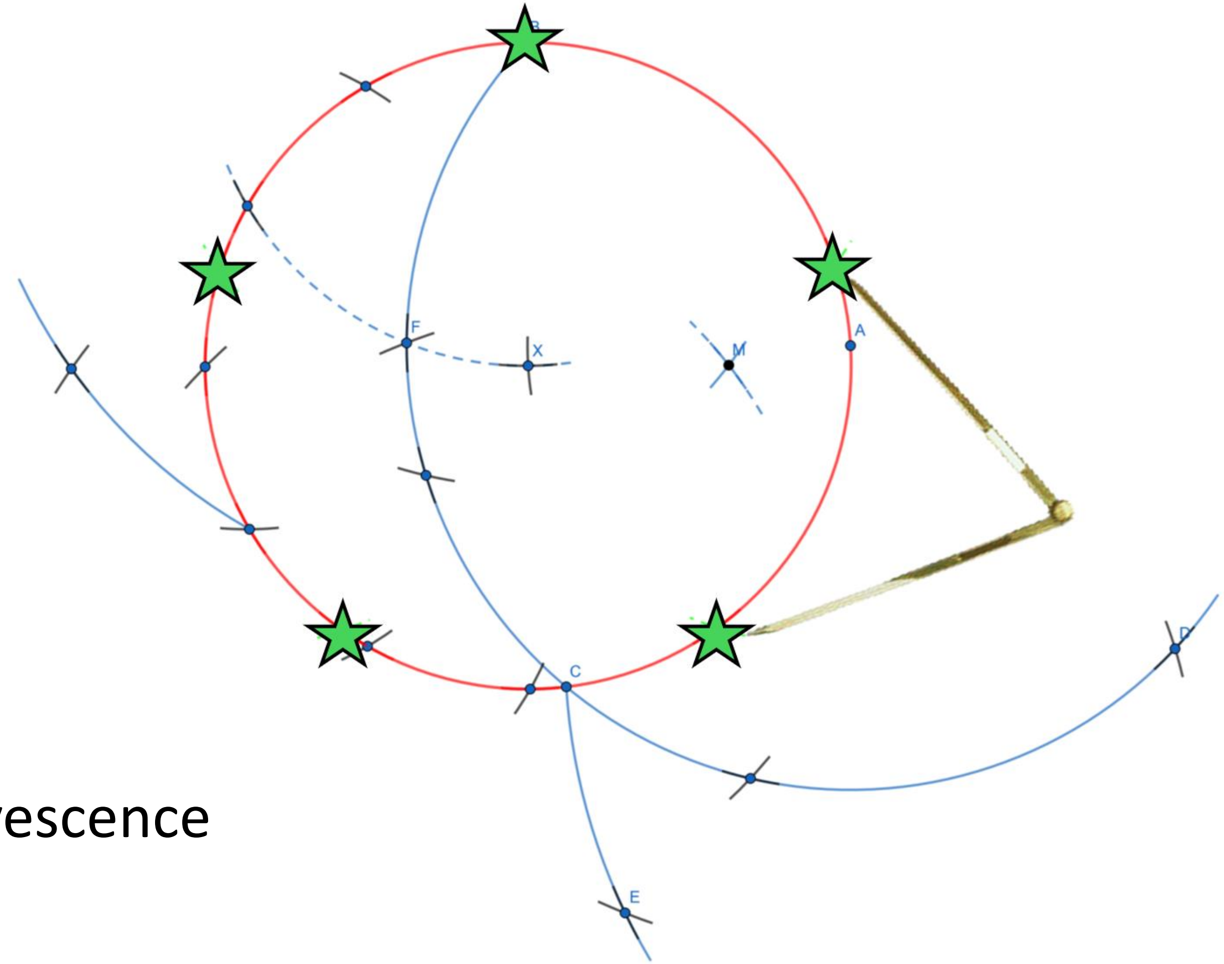
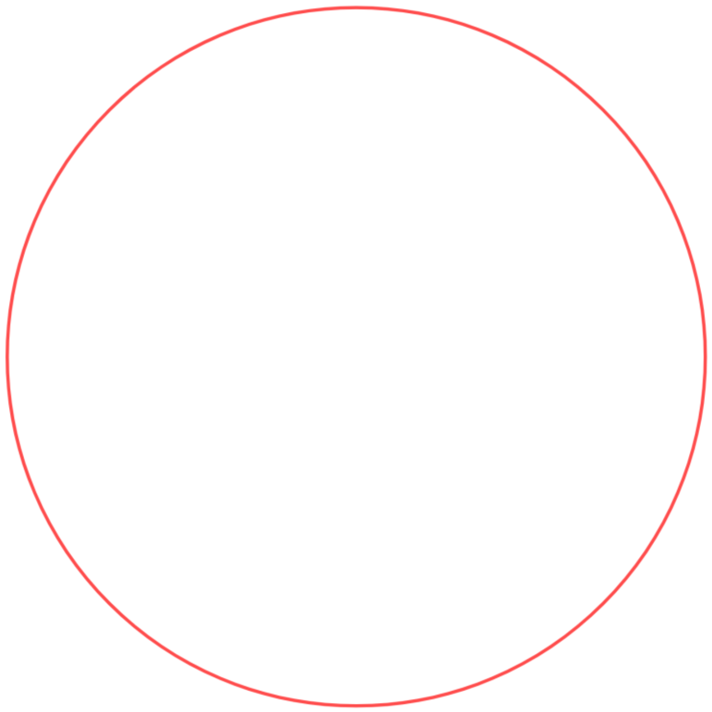
Sur la division du cercle en cinq à l'aide du seul compas



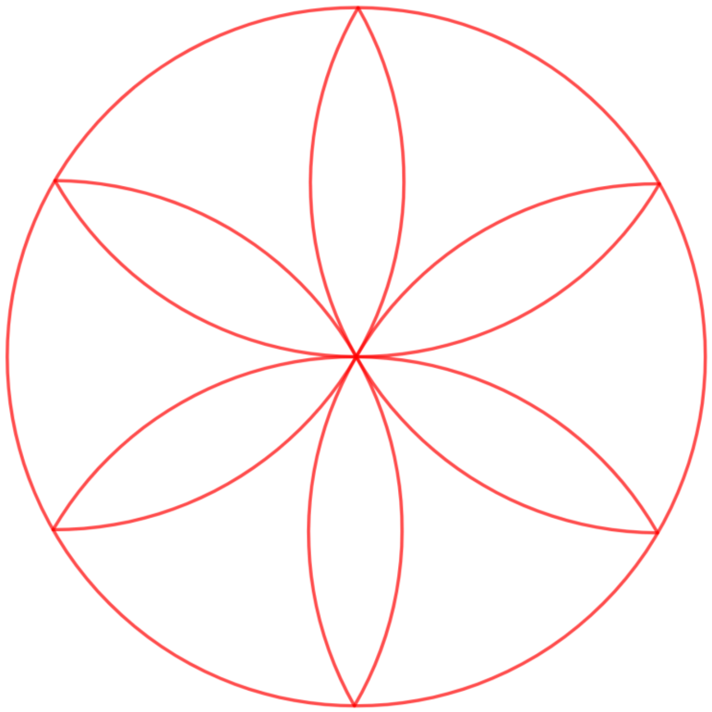
Exposé par Michel Smans à Effervescence

le 19 Janvier 2026



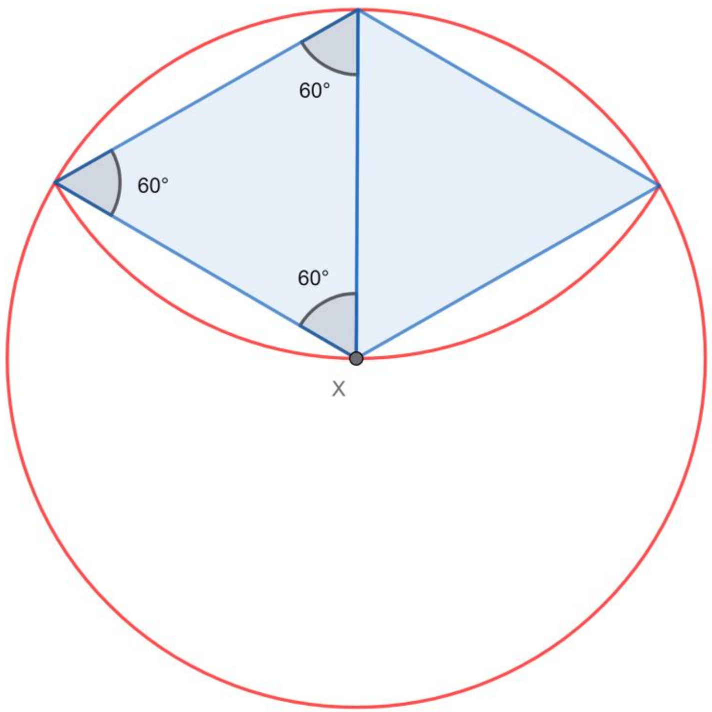
Nous allons donc parler de compas…

Avec un compas on peut dessiner de jolis cercles, parfaitement ronds!



Et probablement, peu de temps après que vous ayez mis la main sur votre premier compas, et dessiné votre premier cercle, vous avez dessiné votre première rosace…

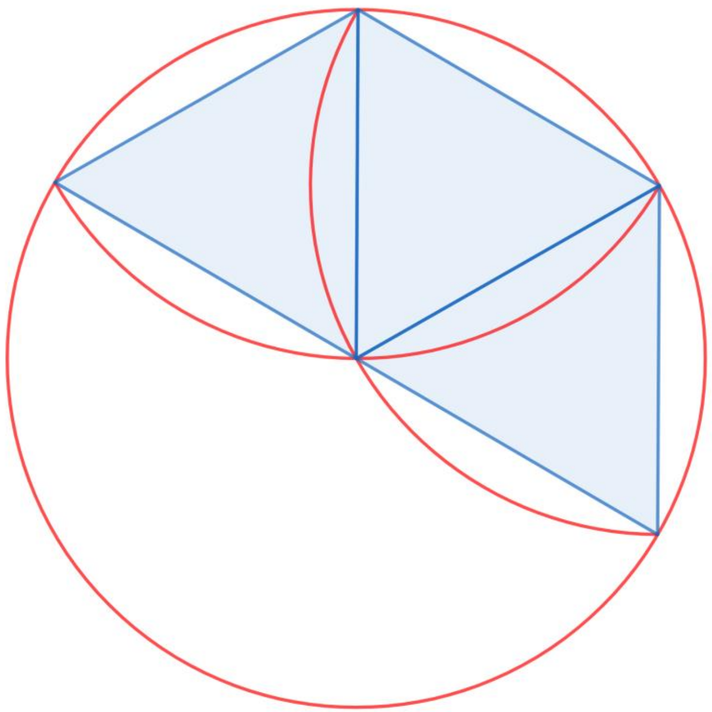
mais, vous êtes-vous demandé pourquoi on retombait sur le point de départ après avoir reporté 6 fois le rayon?



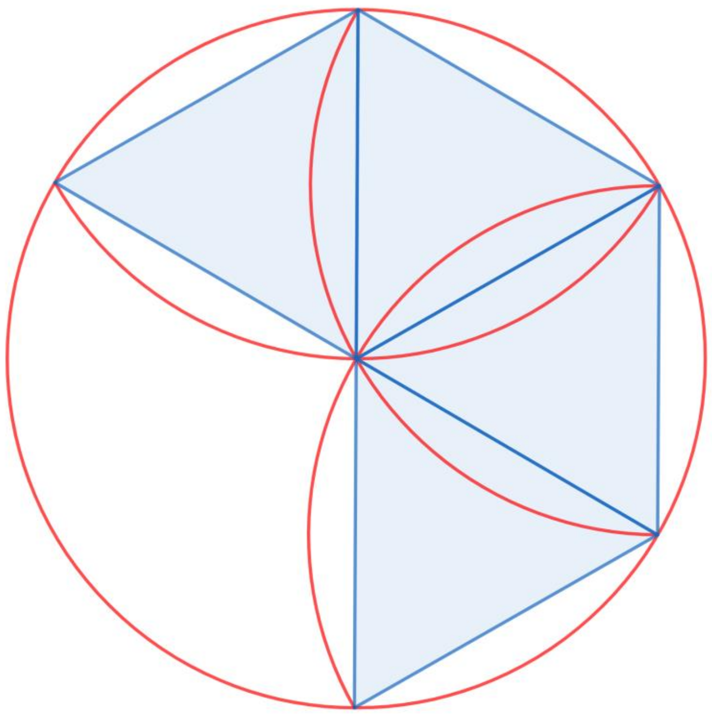
Après le cercle, votre premier coup de compas a déterminé des points sur celui-ci et deux triangles dont les côtés ont tous la même mesure
(le rayon du cercle).

Donc, ces triangles sont “équilatéraux”…

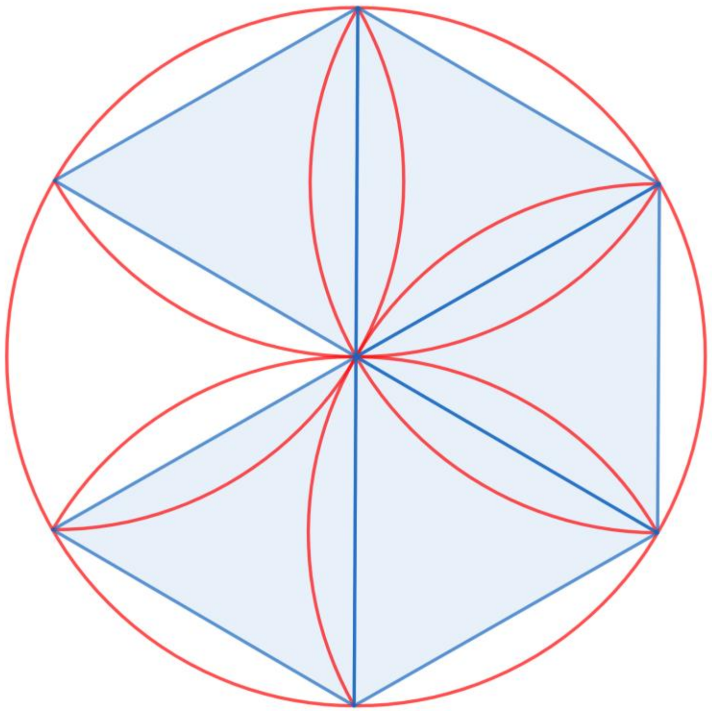
Et donc tous leurs angles mesurent 60º!



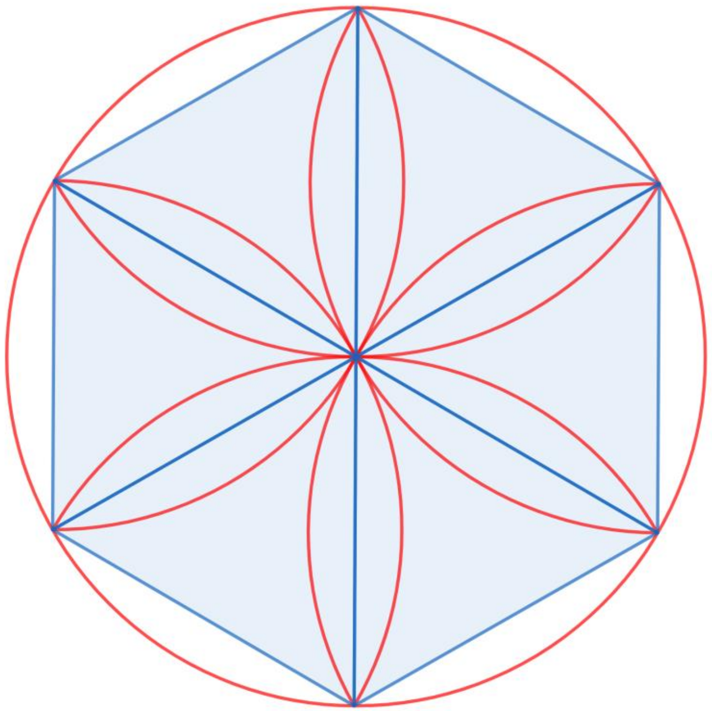
Et les angles du 3^e mesurent 60^o



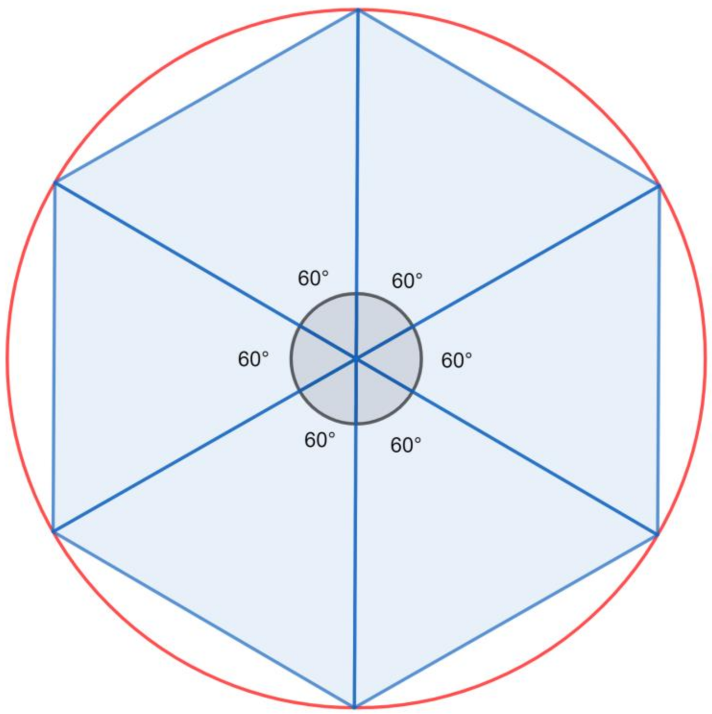
Et les angles du 4e mesurent 60º



Et les angles du 5e mesurent 60º



Et les angles du 6^e mesurent 60^o

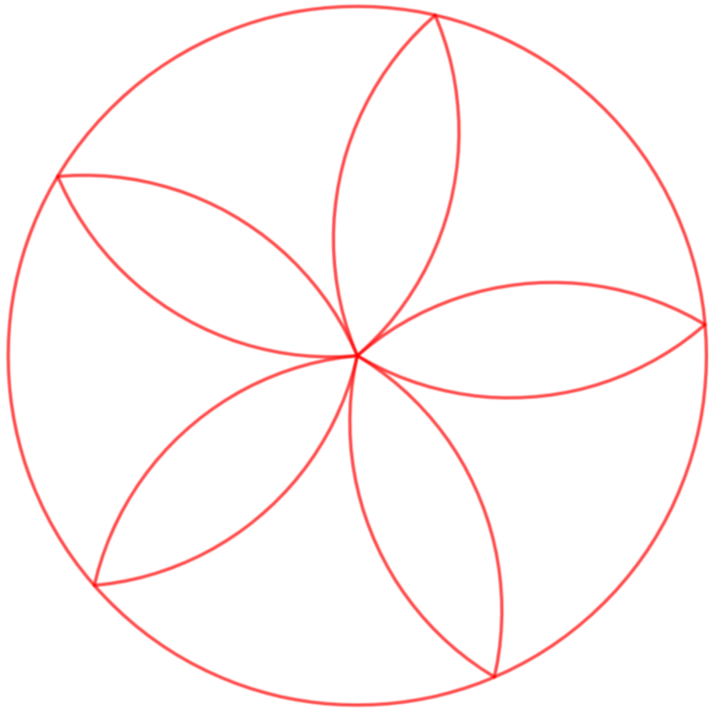


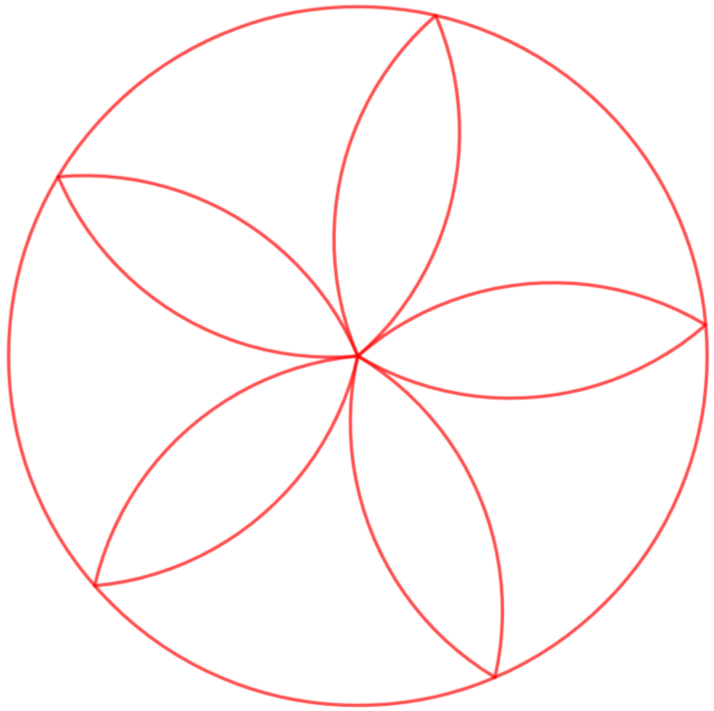
Ils mesurent tous 60^o!

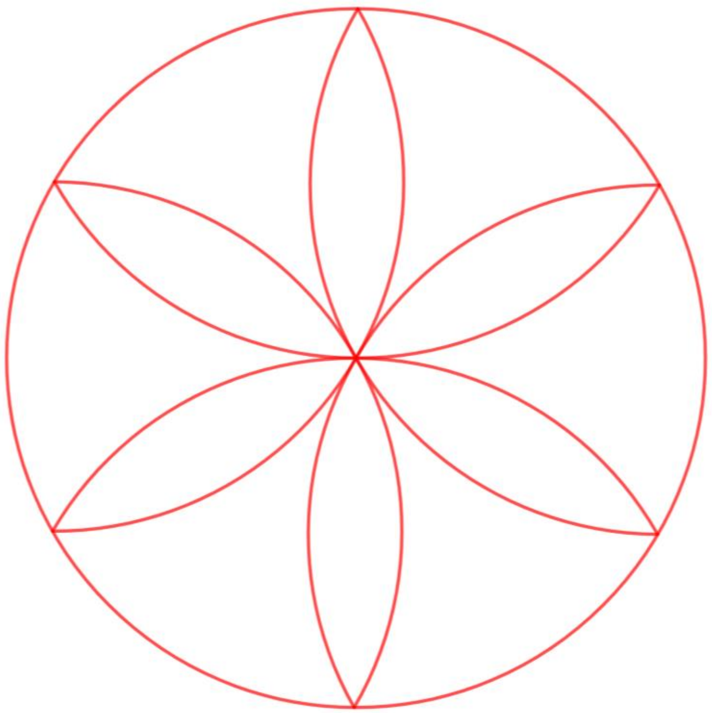
Et puisqu'il y a 360^o dans un cercle, on a fait le tour…

Ni plus, ni moins!

Et après avoir été émerveillé par les rosaces à 6 pétales et la magie du compas, qui a essayé de faire une rosace à 5 pétales??



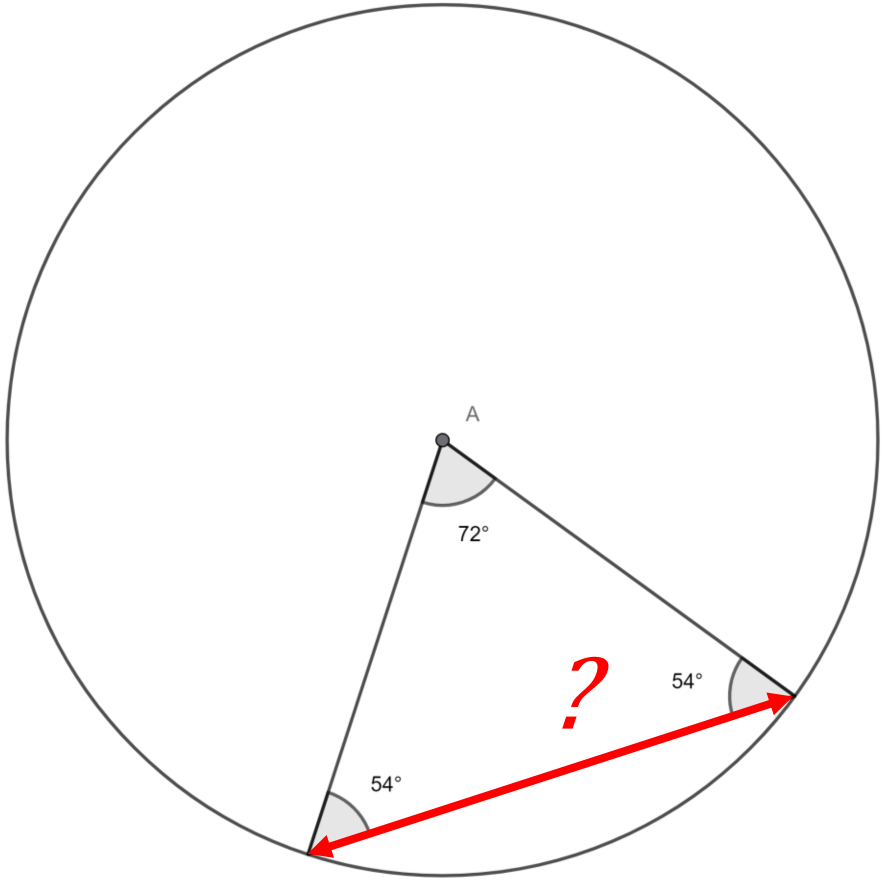




Dans la nature, les fleurs à 5 pétales sont environ 10 fois plus fréquentes que celles à 6 pétales!...

Et puis, personellement, cette rosace à 5 pétales, je la trouve plus esthétique que celle à 6…

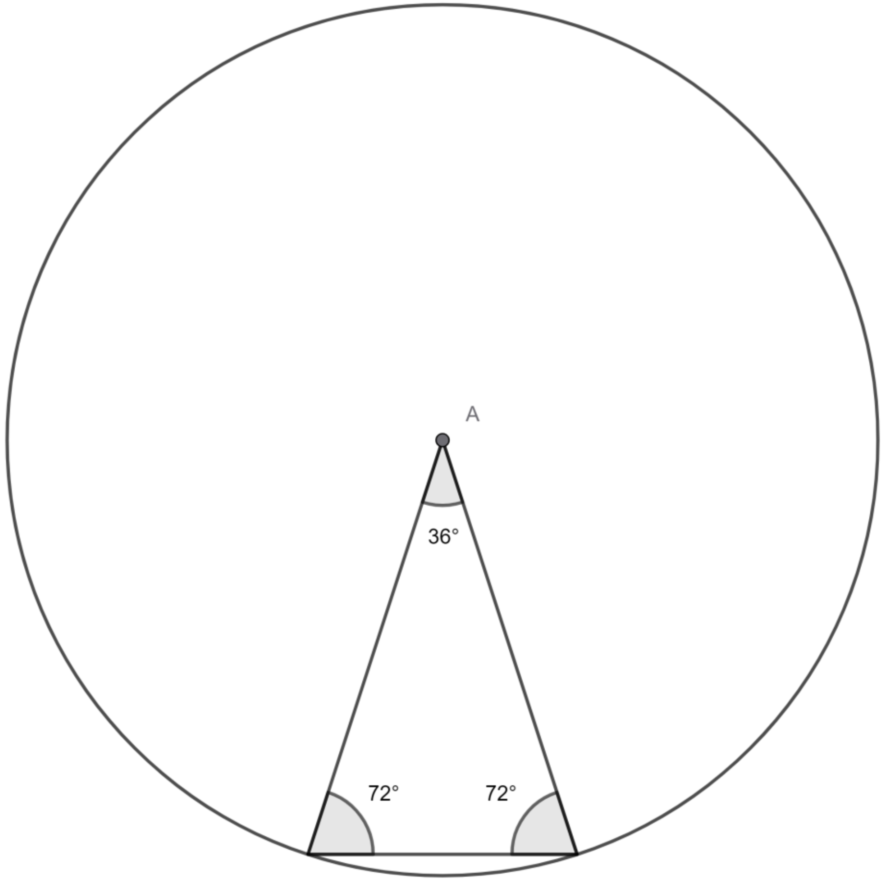
Ça va être plus difficile sûrement, mais ça mérite bien l'effort, non?



Pour diviser le cercle en 5 arcs égaux, il faudrait exprimer la longueur de la corde en fonction du rayon, et surtout, la “construire”…

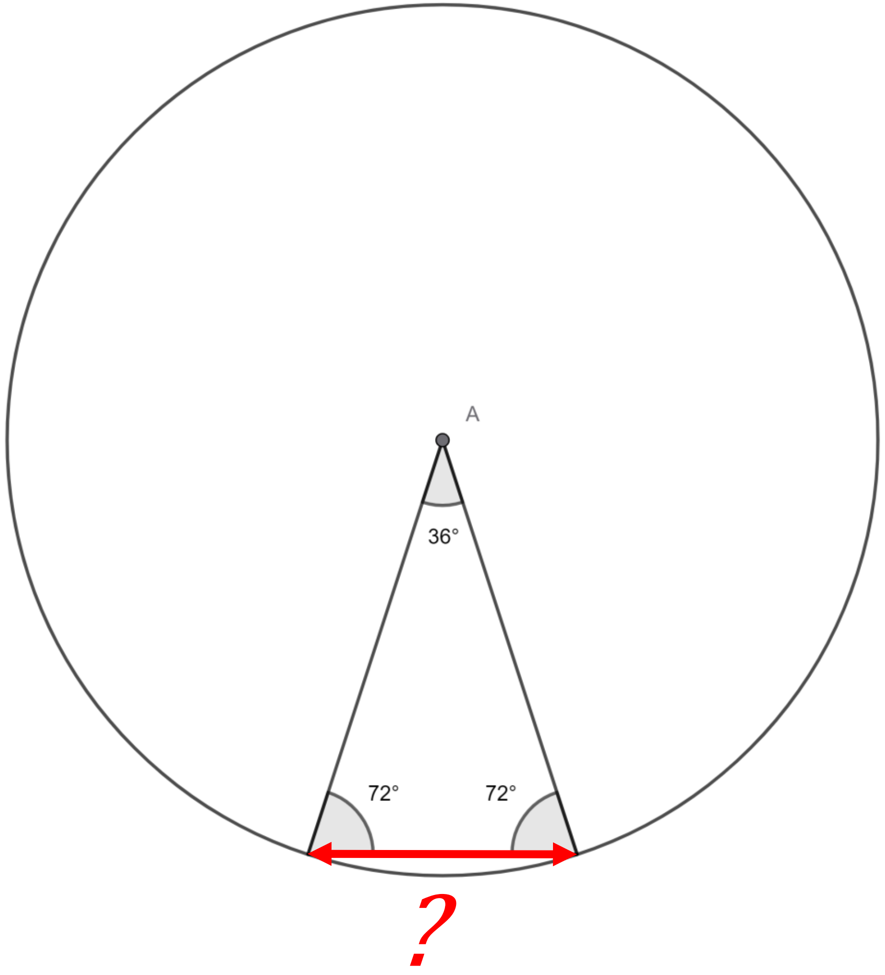
On pourrait étudier ce triangle, avec l’angle au centre de 72º il en faut 5 pour faire le tour…

mais je vous avoue que ce triangle ne m’inspire pas beaucoup!



Par contre celui-ci m’inspire plus!
Avec l’angle au centre de 36º
il en faut 10 pour faire le tour…

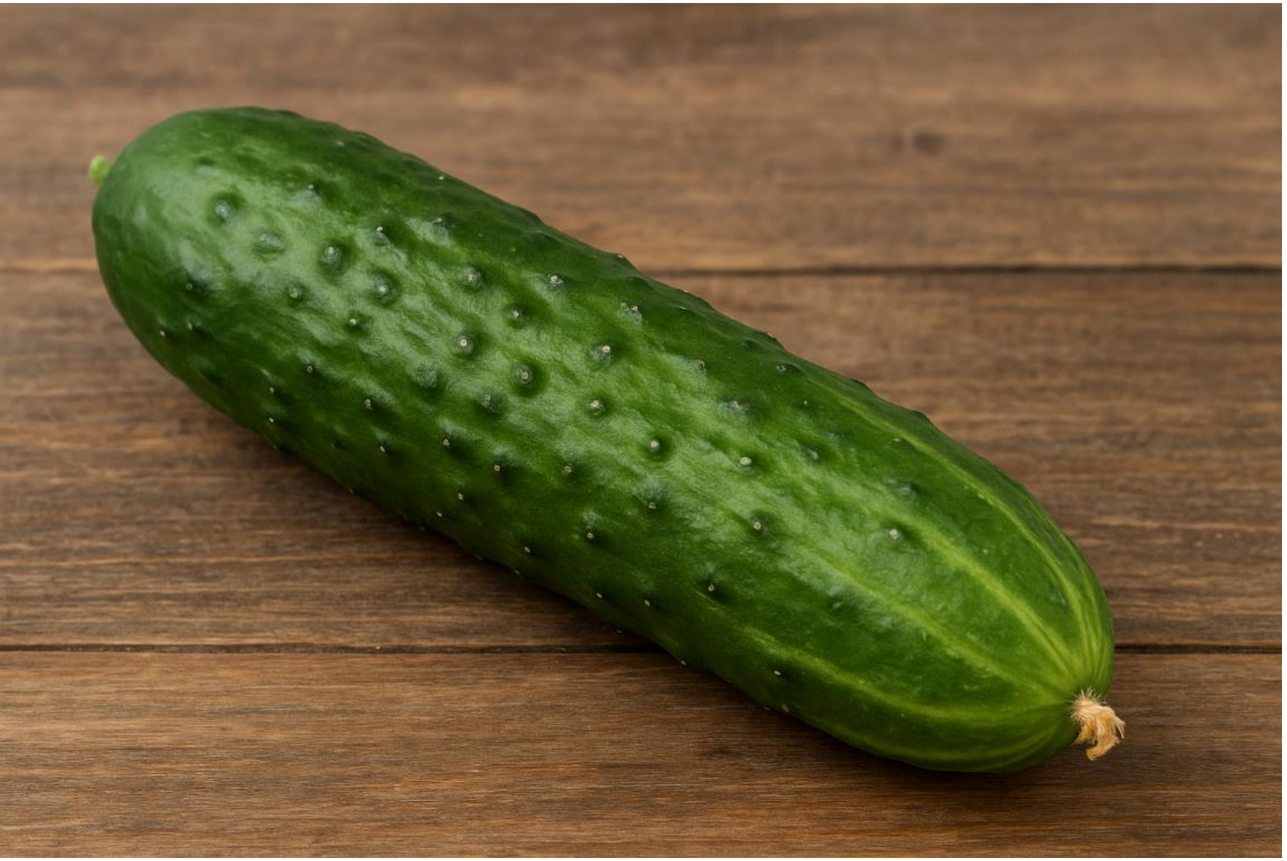
Et regardez les angles à la base…



Il me semble que cette longueur-là
sera plus simple à mesurer!

Mais avant…

Un petit coq-à-l'âne potager!



Voilà un concombre bien frais!

Il pèse 500 gr et contient 90% d’eau

Combien pèse-t-il?

Après avoir passé la journée au soleil, notre concombre ne contient plus que 80% d'eau!

A: plus de 400 gr
B: entre 300 et 400 gr
C: moins de 300 gr

Si le concombre frais contient 90% d’eau,
il contient 10% de matière sèche (soit 50 gr)

À la fin de la journée au soleil,
il contient 20% de matière sèche,
qui pèse toujours 50 gr,
donc le concombre pèse 250 gr…

La bonne réponse est C!

Pourquoi ce coq-à-l'âne?
Pas pour vous piéger, mais vous rappeler
une chose essentielle:

**en mathématiques, notre intuition est une alliée…
mais une alliée qu’il faut surveiller!**

On a l’intuition que les angles du triangle équilatéral sont égaux, il faudrait s’en assurer…

On a l’intuition que les angles à la base du triangle isocèle sont égaux, il faudrait s’en assurer…

Si on vous demande quels chiffres présentent une symétrie haut/bas

0123456789

Vous pensez le "0", le "3" et le "8" ?

Mais à y regarder de plus près

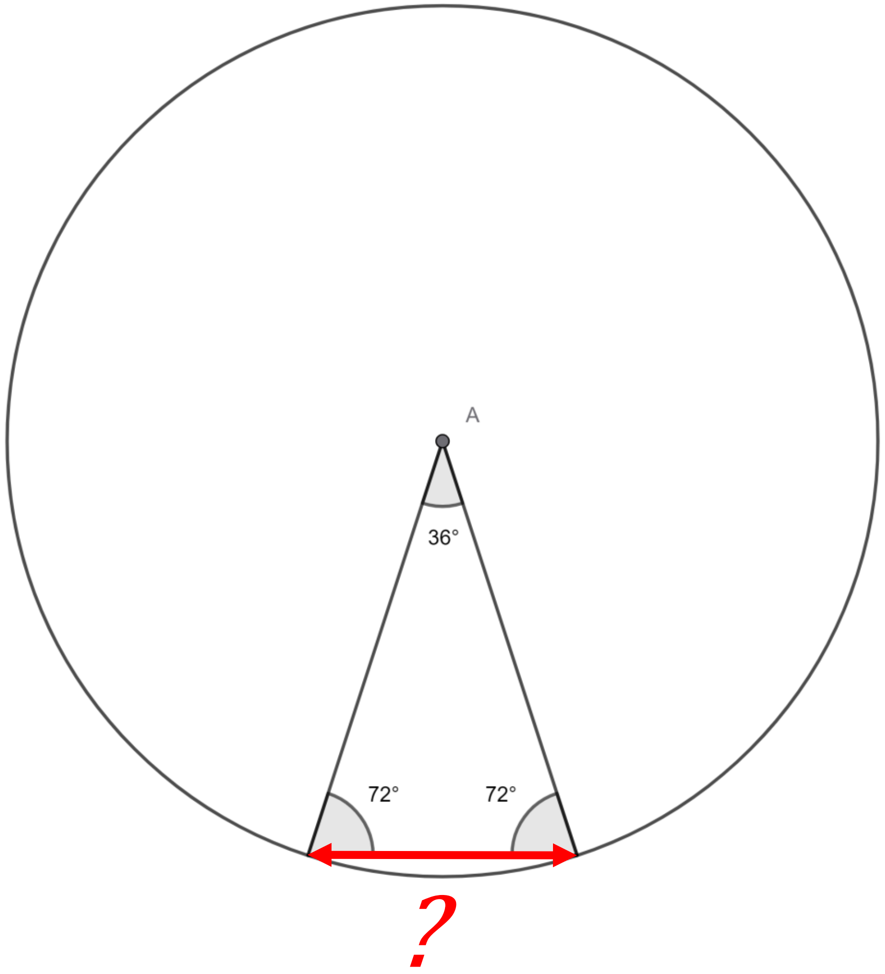
0123456789

Et oui, votre cerveau a envie
de voir des symétries

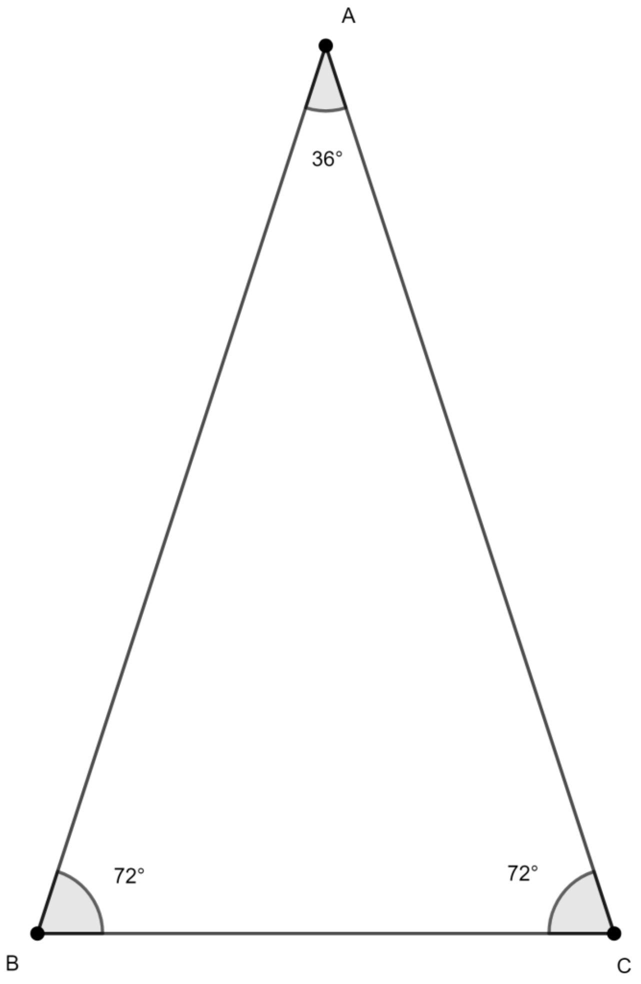
Mais rassurez-vous, pour les triangles
équilatéraux et isocèles, c’est bon.
En prime, si un triangle a 2 angles égaux,
alors il est isocèle (les côtés du 3^e angle sont égaux)
Ah, et aussi, la somme des angles
d’un triangle vaut 180^o (un angle plat)

On pourra démontrer tout ça à la fin si vous voulez
(et s’il nous reste du temps!)

Poursuivons…



Donc on veut exprimer la longueur de la corde en fonction du rayon…

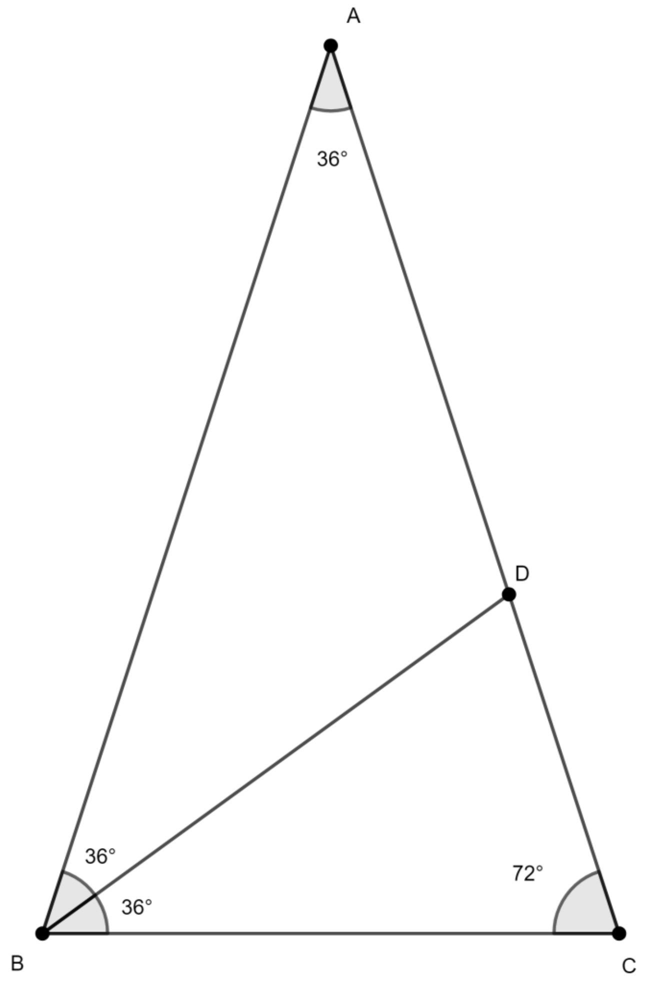


Par combien multiplier le rayon ([AB] ou [AC]) pour trouver [BC]?

$$[BC] = x \times [AB] \quad ou \quad [BC] = x \times [AC]$$

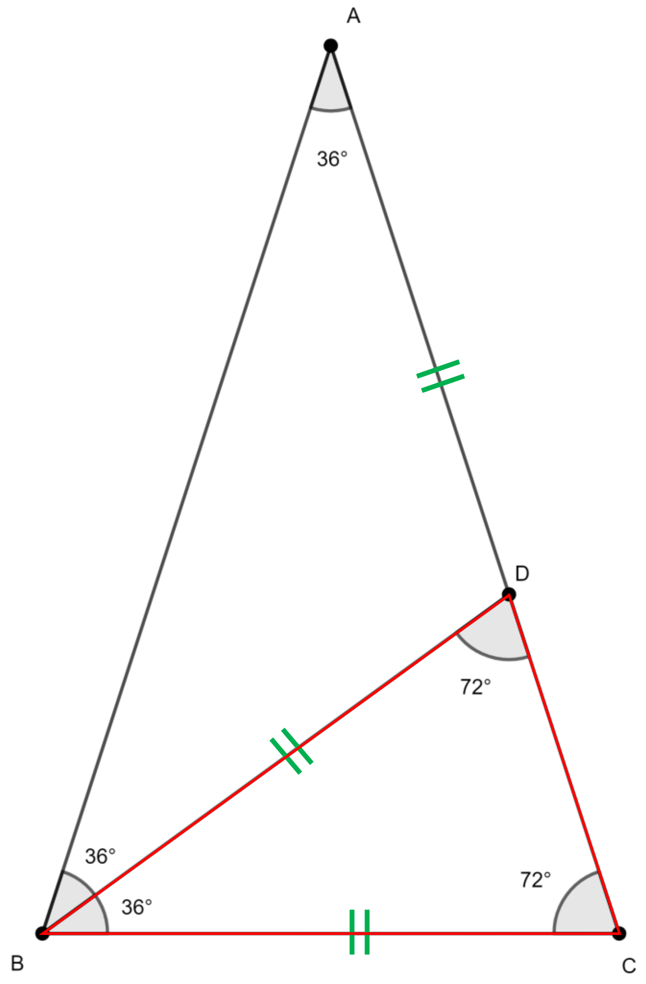
Ou encore, Combien vaut

$$x = \frac{[BC]}{[AB]} = \frac{[BC]}{[AC]}?$$



Comme souvent en géométrie,
on va "compliquer" la figure pour
faire apparaître de nouvelles relations
entre les éléments que nous voulons étudier

la bissectrice de $\widehat{ABC}$
coupe [AC] au point D



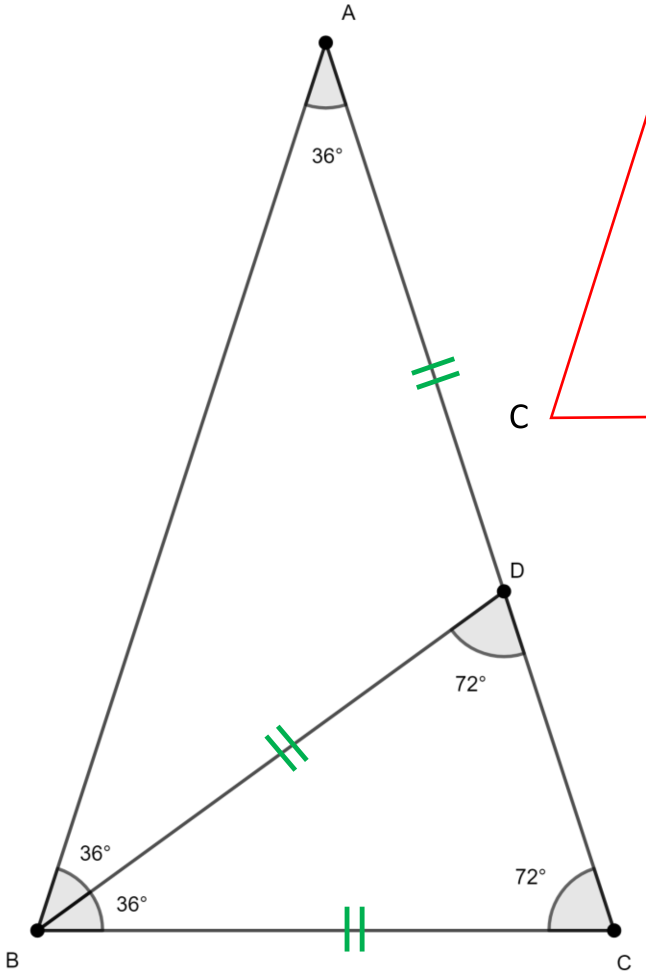
$$\widehat{BDC} = 72° \; car \; \widehat{DBC} = 36° \; et \; \widehat{DCB} = 72°$$

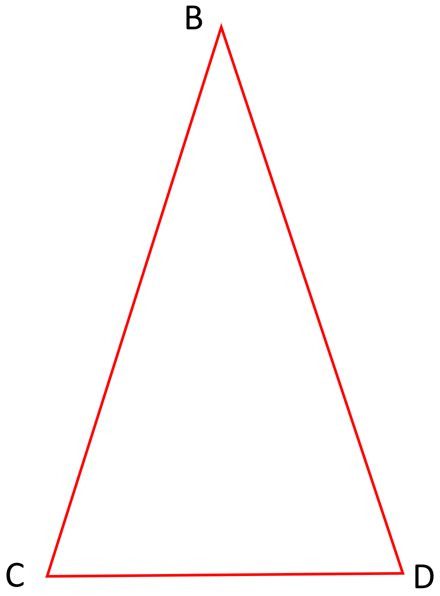
$$donc \; \Delta BCD \; isocèle \; et \; [BD] = [BC]$$

$$\widehat{ABD} = 36° \; et \; \widehat{DAB} = 36°$$

$$donc \; \Delta ABD \; isocèle \; et \; [AD] = [BD] \; \; (= [BC])$$

$$Regardons \; un \; peu \; mieux \; \; \Delta BCD$$





ΔABC et ΔBCD sont **semblables**

(leurs angles correspondants sont égaux)

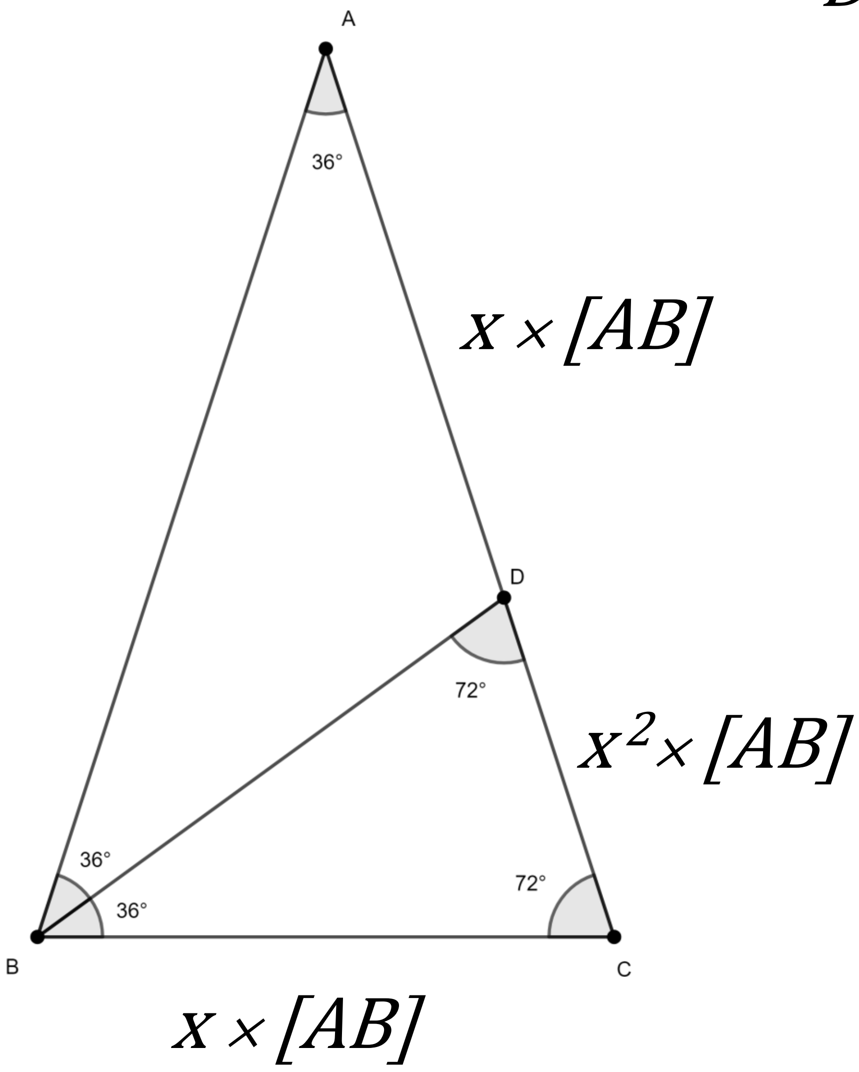
donc les côtés correspondants sont proportionnels

$([BC]=k\times[AB],\ [CD]=k\times[BC],\ [BD]=k\times[AC])$

$et\ aussi, le\ rapport\ entre\ 2\ côtés\ d'un\ triangle\ est\ égal\ au\ rapport\ des\ côtés\ correspondants\ de\ l'autre\ triangle$

$$par\ exemple, \frac{[CD]}{[BD]} = \frac{k\times[BC]}{k\times[AC]} = \frac{[BC]}{[AC]}$$

NB: On pourra démontrer ça à la fin…



Donc, on cherche x tel que $[BC] = x \times [AB]$

Avec les triangles semblables,

on a $[CD] = x \times [BC] = x \times x \times [AB]$

Donc $[AC]=[AD]+[DC]$

$= x \times [AB] + x^2 \times [AB] = [AB]$

Et donc $x^2 + x = 1$

Ou encore $x^2 + x - 1 = 0$

(c'est ce qu'on appelle une équation du second degré)

Comment trouver x pour que $x^2 + x - 1 = 0$?

se souvenir que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$?

Mais on risque de ne pas convaincre les sceptiques! 😉

Non, utilisons plutôt le "couteau suisse" de l'Algèbre:
Les identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

La 1^{ere} et la 3^e en particulier vont bien nous aider …

$$on\ a\ donc\ x^2 + x - 1 = 0$$

$$ré\text{−}écrivons\ l'équation:\ x^2 + \frac{2x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = 0$$

$$ou\ \left(x^2 + \frac{2x}{2} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{5}{4}\right) = 0$$

$$ou\ [(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0$$

$$et\ donc\ [a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]:\ \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

$$ou\ encore\ \left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0$$

$$le\ premier\ facteur\ vaut\ 0\ avec\ x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 0\ \ ce\ qui\ ne\ nous\ intéresse\ pas,$$

$$mais\ le\ 2^e\ facteur\ vaut\ 0\ avec\ x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Notons cette valeur δ

on a donc $\delta^2 + \delta - 1 = 0$

ou $\delta^2 + \delta = 1$ ou encore $\delta + 1 = \frac{1}{\delta}$

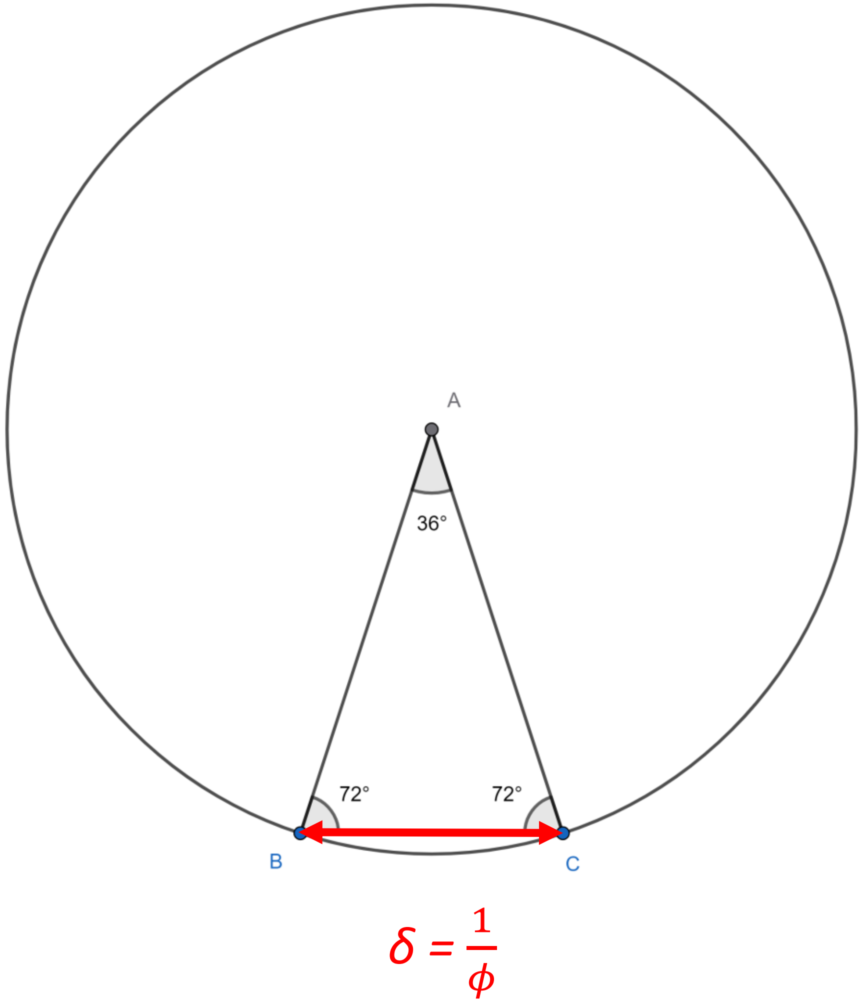
Mais $\delta = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ *donc* $\delta + 1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

C'est le fameux nombre d'or, habituellement noté ϕ (Phi)

$$\delta^2 + \delta - 1 = 0$$
$$\delta^2 = 1 - \delta$$
$$\frac{1}{\delta} = \delta + 1$$
$$\delta = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}6180339887\ldots$$

$$\delta = \frac{1}{\phi}$$

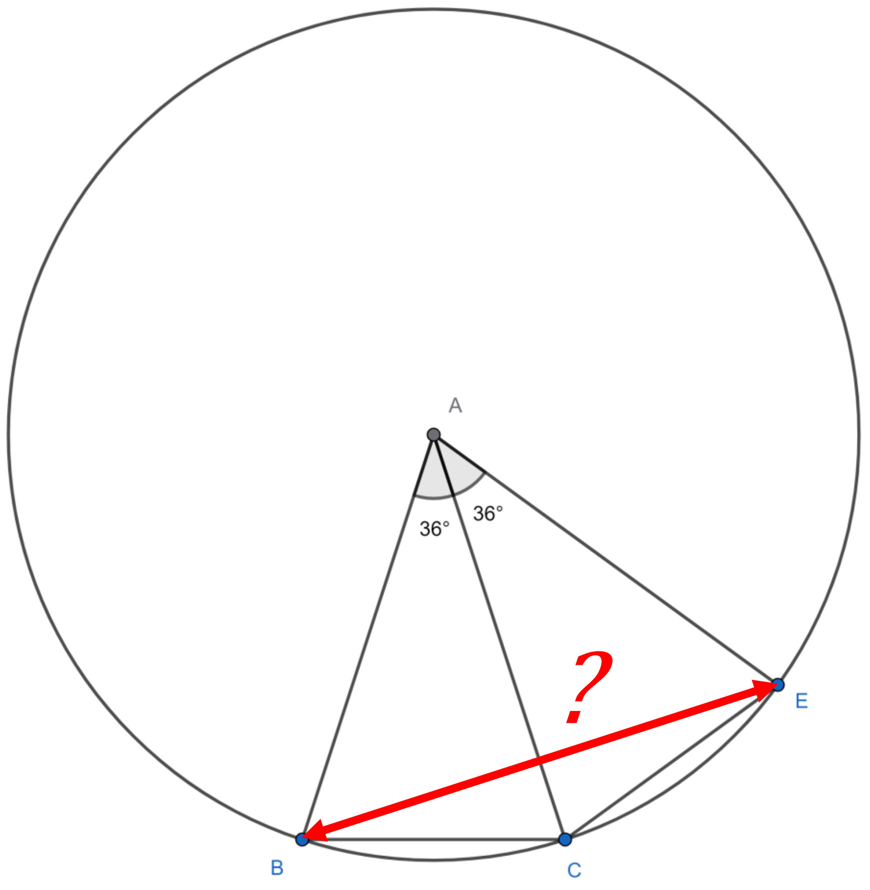
$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$
$$\phi^2 = \phi + 1$$
$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1$$
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$



On a gagné la première bataille:
La corde qui sous-tend un arc
d'un dixième de cercle de rayon 1 (*)
mesure $\delta = \frac{1}{\phi}$

Nos armes pour cette bataille:
les triangles semblables,
les triangles isocèles,
un peu d'algèbre

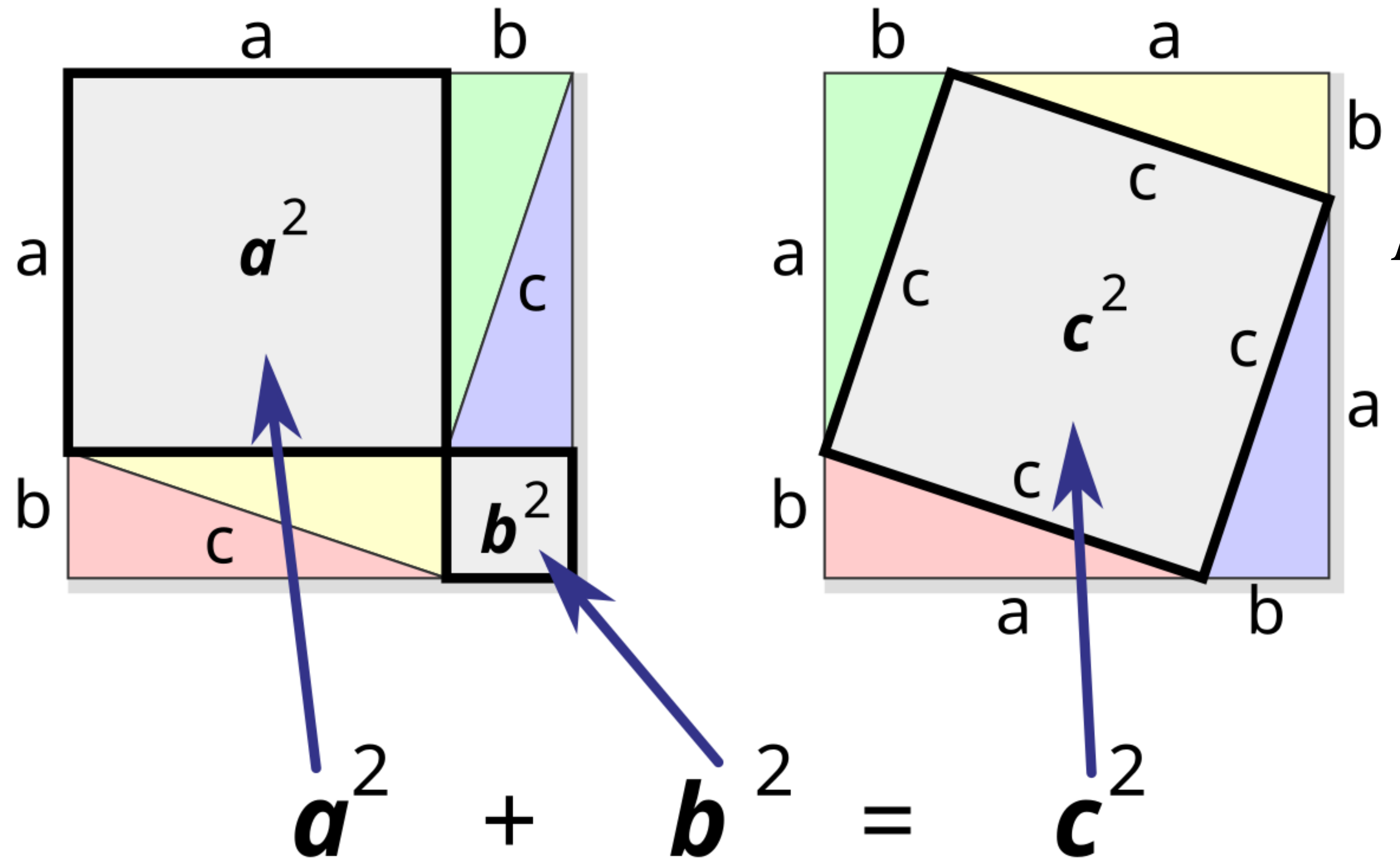
(*) par la suite on prendra le rayon comme unité de mesure,
c'est à dire que le rayon mesure 1



Pour la deuxième Bataille,
mesurer la corde qui sous-tend un arc
d'un cinqième cercle (on va appeler cette mesure γ *),*
nous avons besoin d'une autre arme: Pythagore!

Et cette arme-là, vous allez voir par la suite,
est un peu la "Grosse Bertha" de notre arsenal!

Et on en aura besoin aussi pour "construire"
des valeurs telles que $\sqrt{5}$



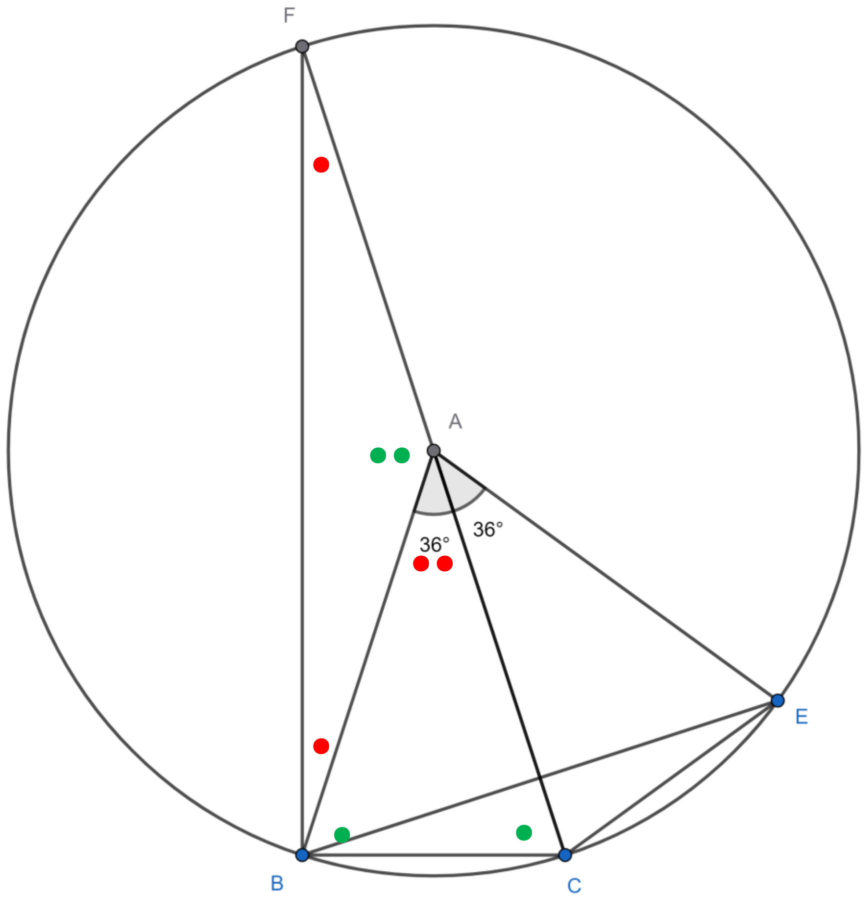
« Dans un triangle rectangle,
le carré de la longueur de l'hypoténuse
(ou côté opposé à l'angle droit)
est égal à la somme des carrés des
longueurs des deux autres côtés. »

Il existe plusieurs centaines de démonstrations de ce théorème, la dernière datant de 2022 et proposée par deux lycéennes de Louisiane, Ne'kiya Jackson et Calcea Johnson.

Je vous propose plutôt celle-ci, particulièrement "parlante"...

Poursuivons en construisant F diamétralement opposé à C

("compliquer" la figure pour faire apparaître de nouvelles relations)



ΔAFB *isocèle car* $[AF] = [AB]$

L'angle $\widehat{FAB}$ (••) *est le supplément de l'angle* $\widehat{CAB}$

donc (•) $\widehat{BFA} = \widehat{FBA} =$ *moitié de* $\widehat{CAB}$ (••)

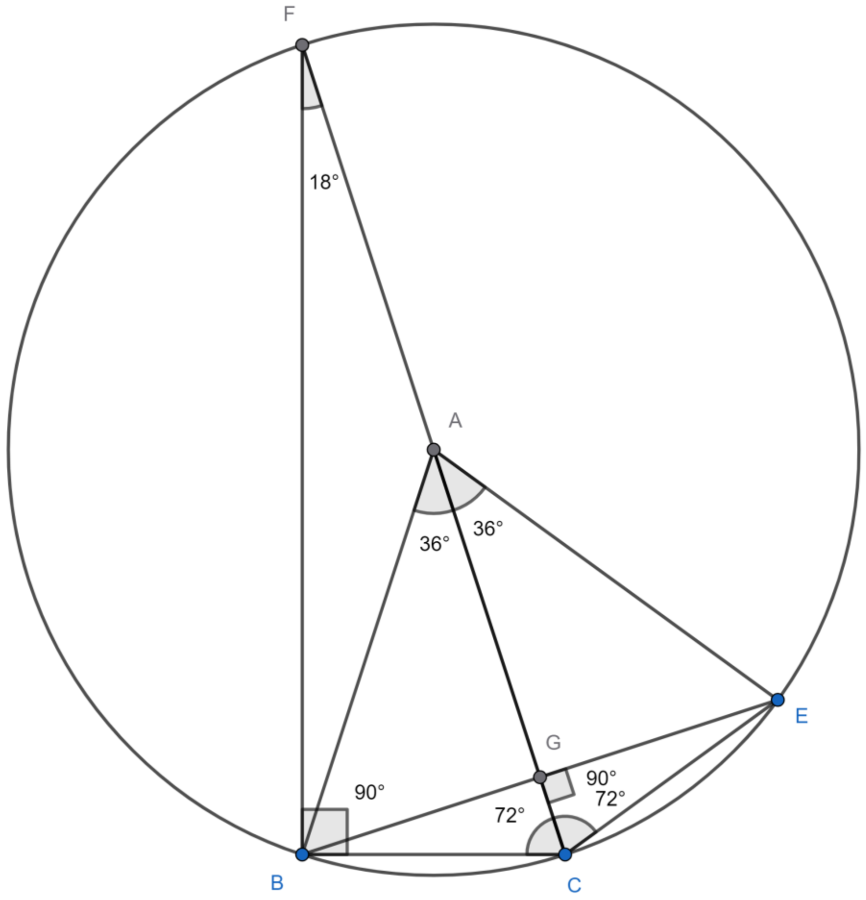
L'angle $\widehat{CAB}$ (••) *est le supplément de l'angle* $\widehat{FAB}$

donc (•) $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} =$ *moitié de* $\widehat{FAB}$ (••)

Donc $\widehat{FBC} = \widehat{FBA} + \widehat{ABC} =$ *moitié de* $\widehat{CAB} + \widehat{FAB}$

$=$ *moitié de* $180° = 90°$ *et* ΔFBC *est rectangle*

remarquez que ceci est indépendant de la valeur $36°$ *et donc,*
que tout triangle inscrit dans un cercle et dont un côté
est un diamètre est un ***triangle rectangle***
(encore quelques munitions pour plus tard!)



Notez que A est à la même distance de B que de E et que C aussi.

*Ils sont donc sur la **médiatrice** de [BE],*

la droite perpendiculaire au segment [BE]

et qui passe par son milieu.

$Donc\ \widehat{EGC} = 90°\ et\ \Delta FBC\ est\ semblable\ au\ \Delta EGC$

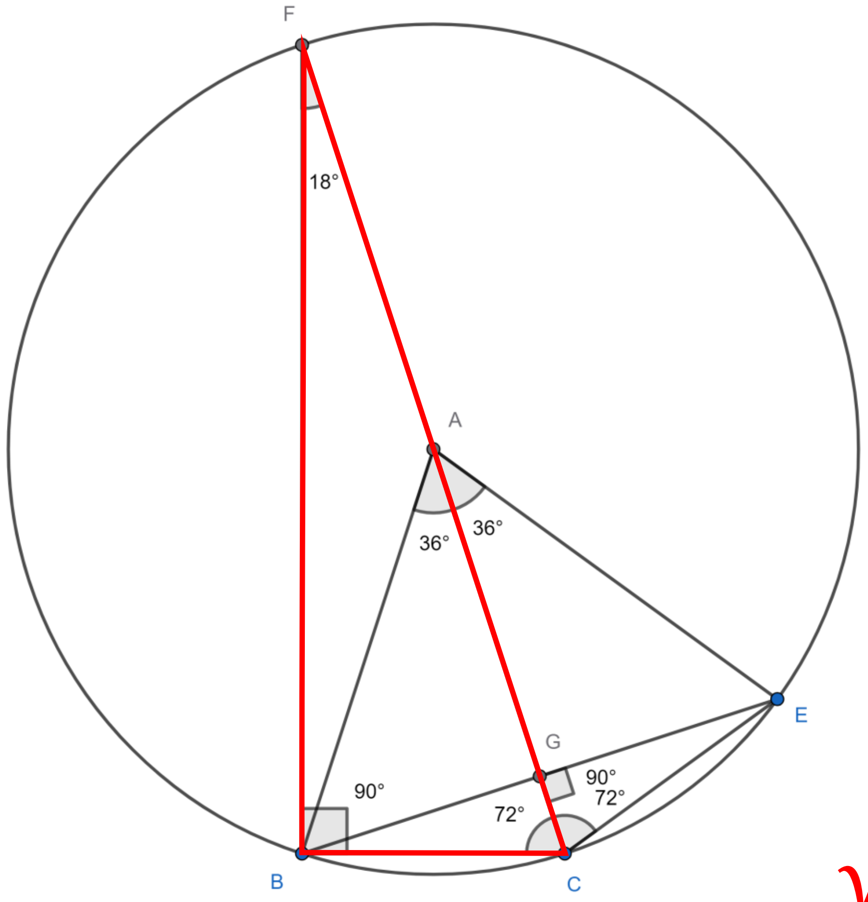
$$\text{donc } \frac{[GE]}{[CE]} = \frac{[BF]}{[CF]} = \frac{[BF]}{2}$$

$$2\times[GE] = [BF] \times [CE]$$

$$\gamma = [BF] \times \delta$$

mais que vaut [BF] ?

$$\gamma = [BF] \times \delta$$



$$[BF]^2 + \delta^2 = 4 \qquad [BF] = \sqrt{4 - \delta^2}$$

$$\textit{donc,}\ \gamma = [BF] \times \delta = \delta\sqrt{4 - \delta^2}$$

$$= \sqrt{\delta^2(4 - \delta^2)}$$

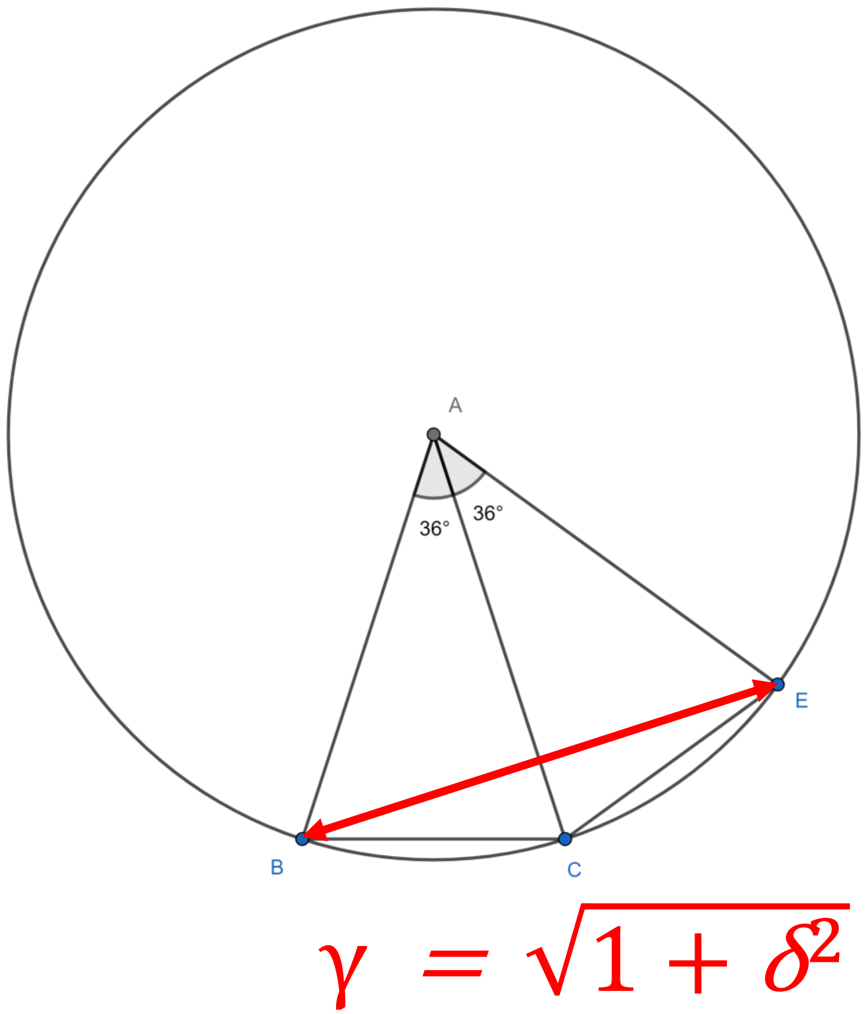
$$\text{mais } \delta^2 = 1 - \delta$$

$$\text{Donc, } \gamma = \sqrt{(1-\delta)(4 - (1-\delta))}$$

$$= \sqrt{(1-\delta)(3+\delta)} = \sqrt{3 - 2\delta - \delta^2}$$

$$= \sqrt{1 + 2 - 2\delta - 2\delta^2 + \delta^2} = \sqrt{1 + \delta^2}$$

$$\gamma = \sqrt{1 + \delta^2}$$



On a gagné la deuxième bataille:
La corde qui sous-tend un arc
d'un cinquième de cercle
mesure $\gamma = \sqrt{1 + \delta^2}$

Nos armes additionnelles pour cette bataille:
les triangles rectangles (Pythagore),
les médiatrices

$Ces\ 2\ valeurs,\ \delta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ et\ \gamma\ = \sqrt{1+\delta^2}$

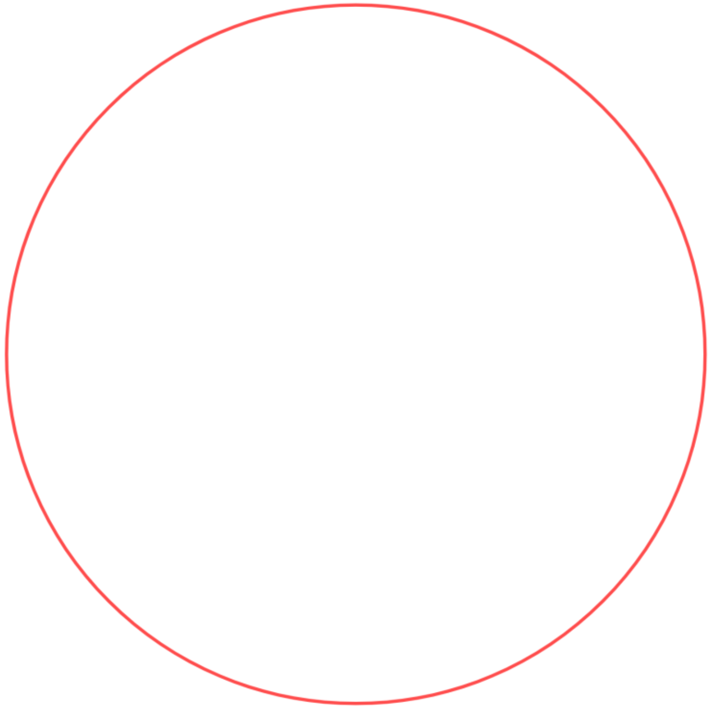
C’est plutôt une bonne nouvelle car

$\sqrt{5}$ peut se construire avec un triangle rectangle de côtés 1 et 2

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ peut se construire avec un triangle rectangle de côtés 1 et $\frac{1}{2}$

γ peut se construire avec un triangle rectangle de côtés 1 et δ

Voilà notre joli cercle…



Nous savons que pour diviser en 10,

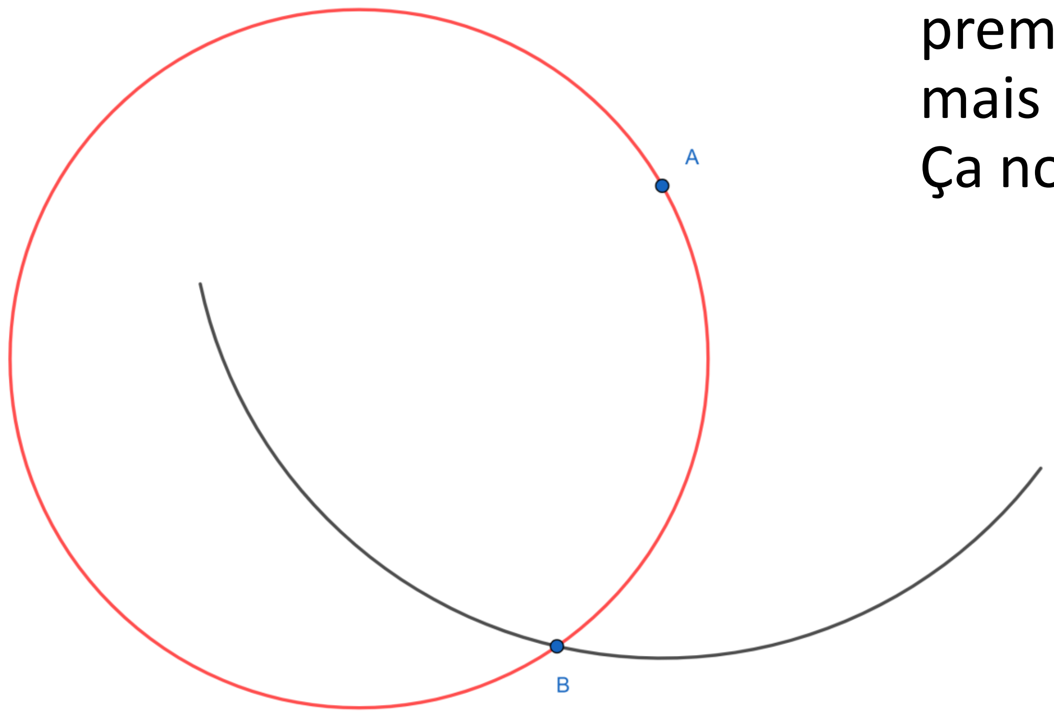
la corde mesure $\delta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Et pour diviser en 5,

La corde mesure $\gamma = \sqrt{1+\delta^2}$

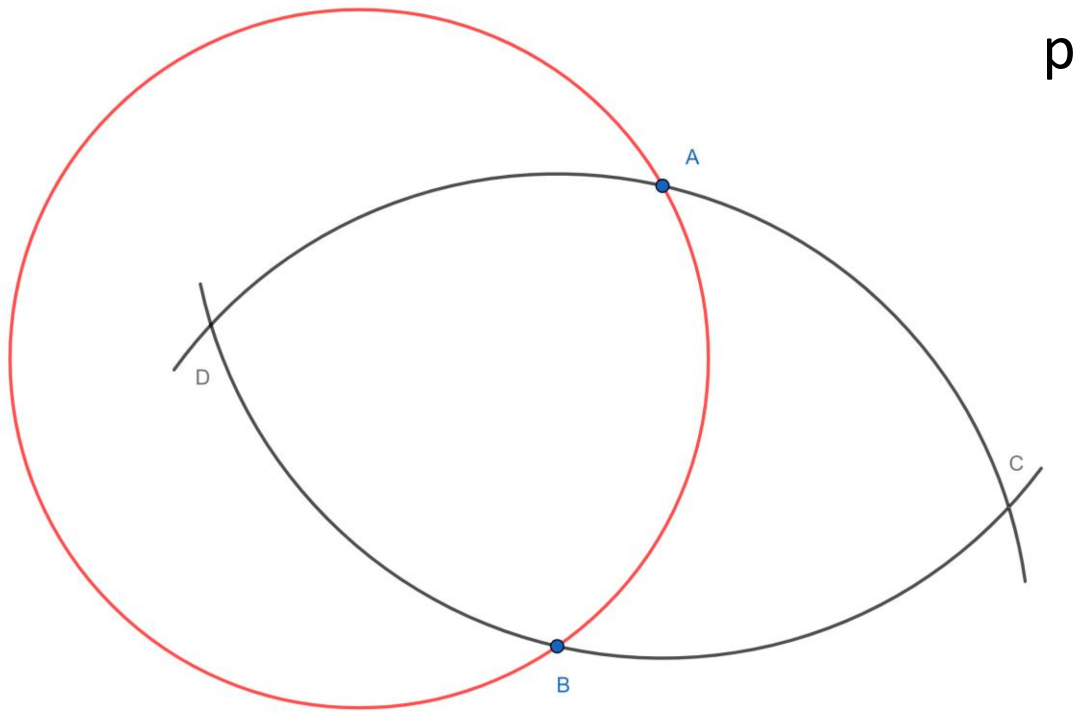
La construction “classique” se base sur 2 diamètres perpendiculaires…

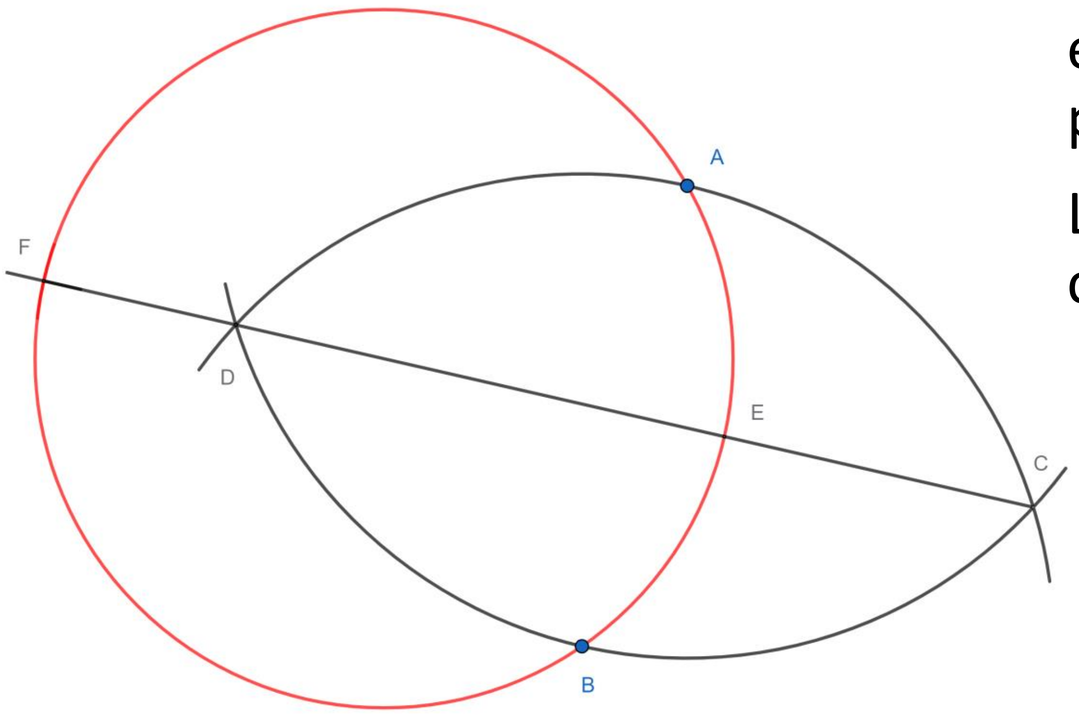
il faut donc commencer par trouver le centre (grâce aux médiatrices)



On choisit un point A sur le cercle et on trace un premier arc de cercle avec un rayon quelconque mais plus petit que le diamètre du cercle
Ça nous donne le point B

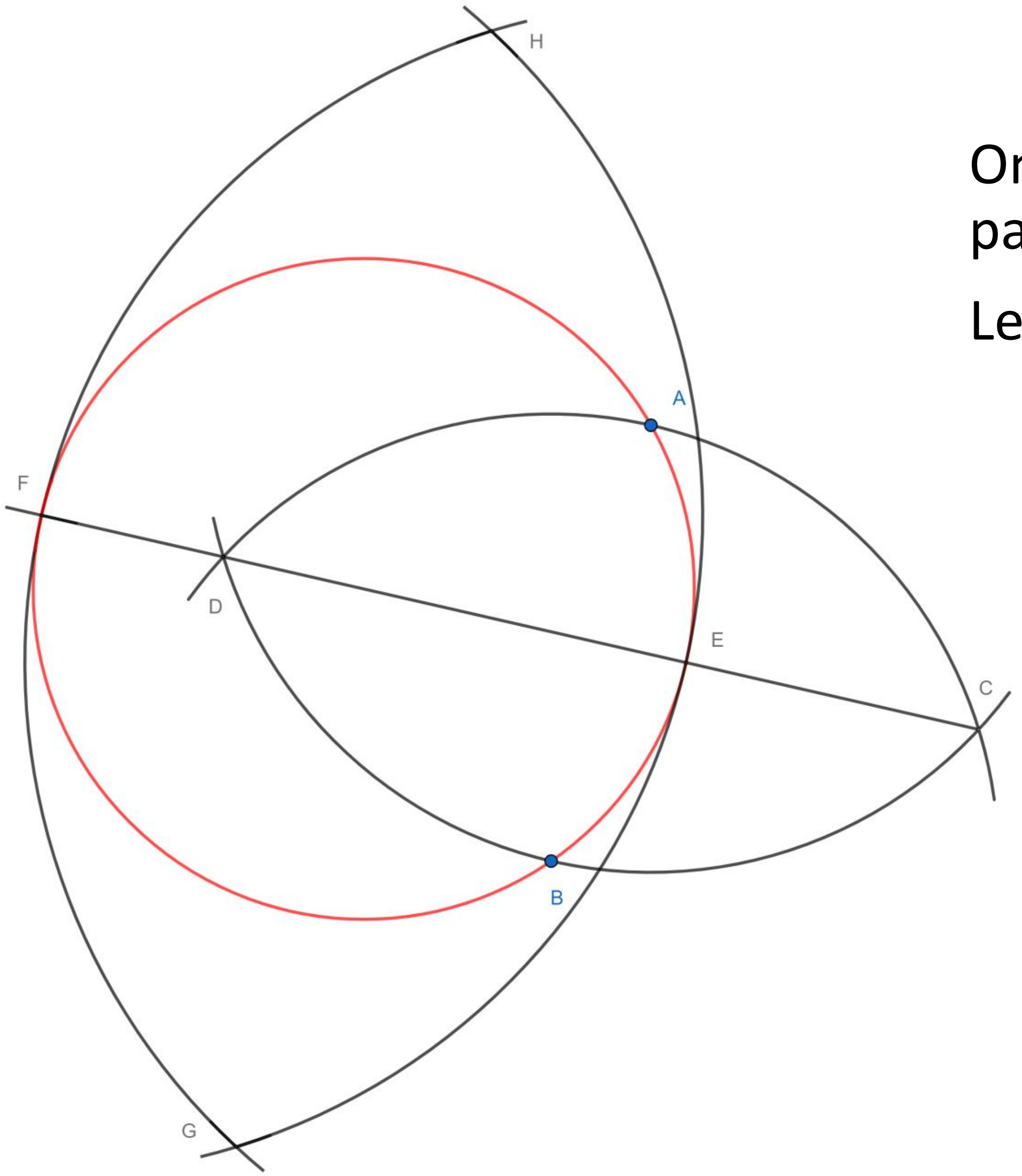
Avec le centre B et le même rayon on trace un deuxième arc de cercle dont l’intersection avec le premier nous donne les points C et D





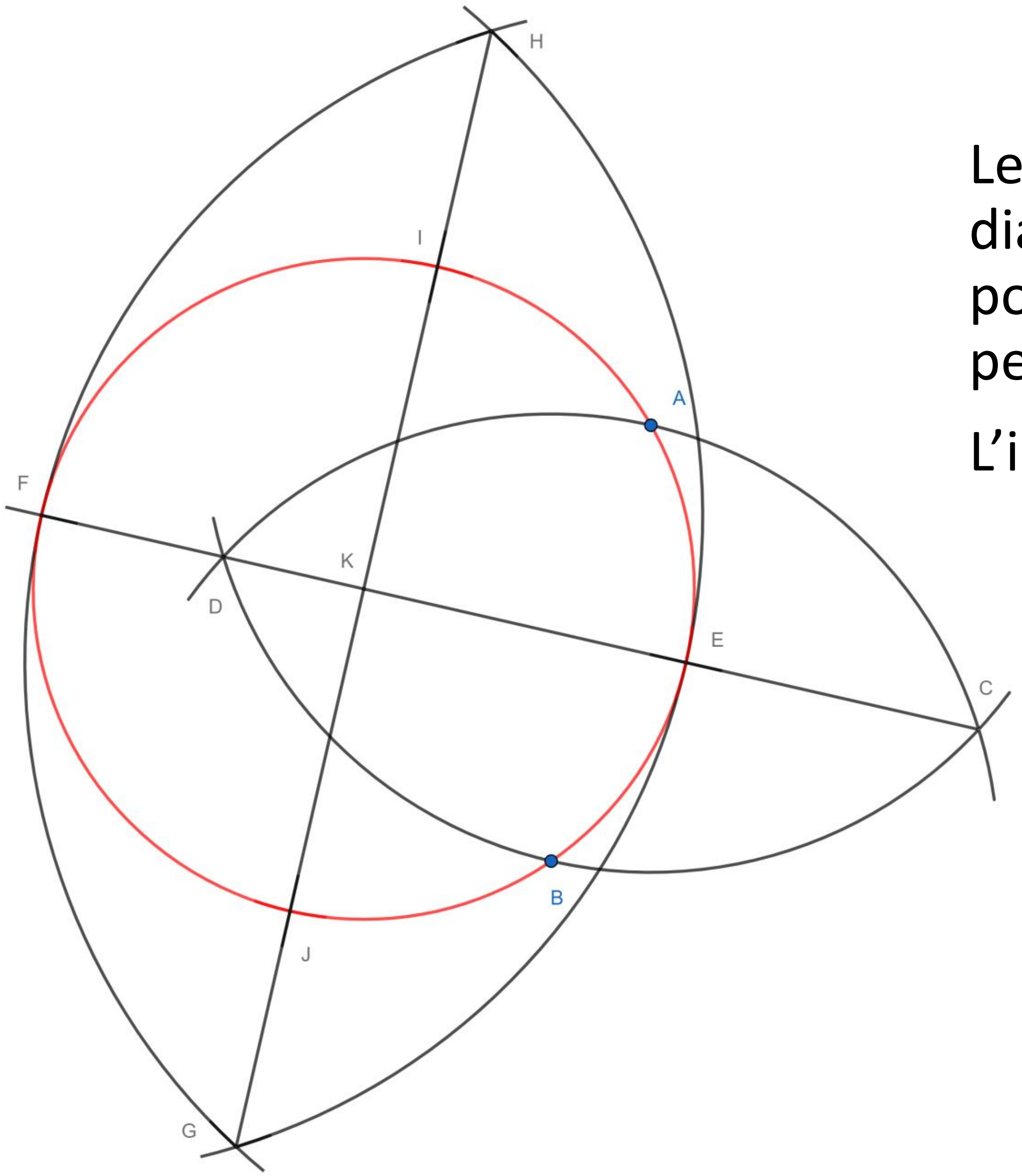
C et D sont à la même distance de A et B,
ils sont donc sur la médiatrice du segment AB
et le centre du cercle se trouve sur cette droite
puisqu’il est à la même distance de A et B.

La droite coupe le cercle aux points E et F,
ce qui nous donne un premier diamètre.



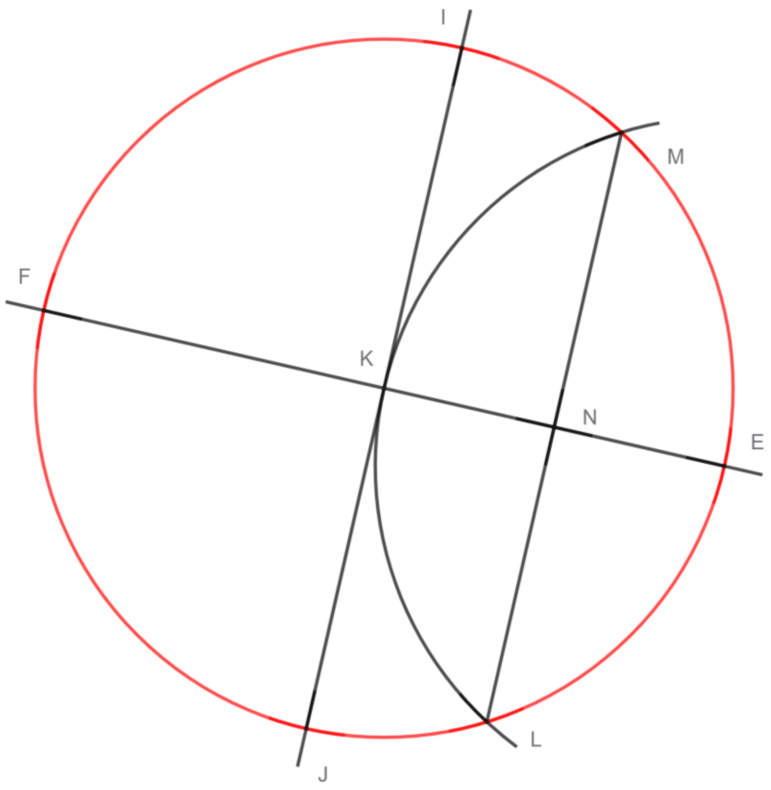
On trace 2 nouveaux arcs, un de centre E passant par F et un de centre F passant par E.

Leurs intersections nous donnent les points H et G



Les points H et G sont sur la médiatrice du diamètre EF et donc la droite passant par ces 2 points nous donne le 2e diamètre IJ, perpendiculaire au premier.

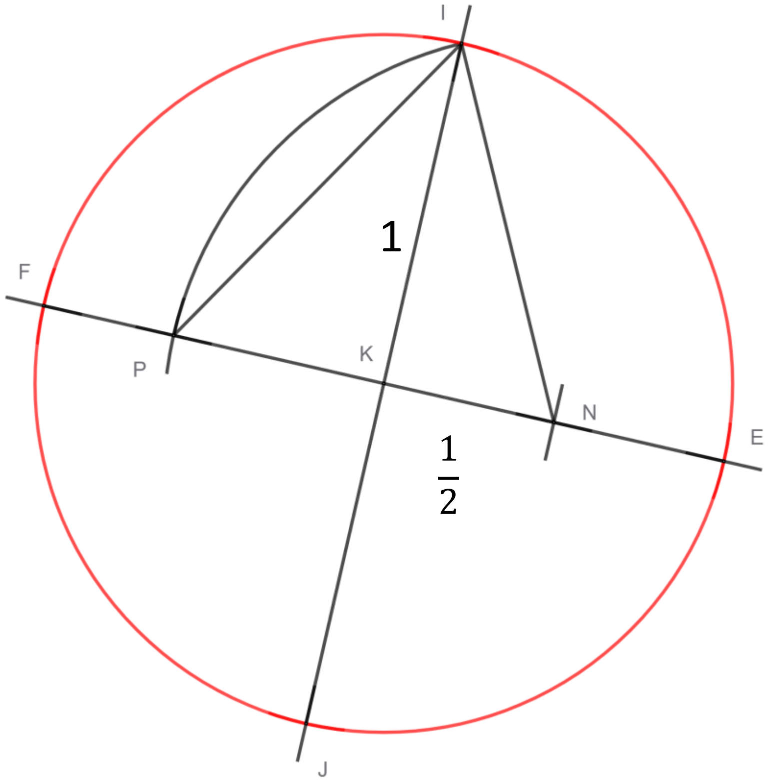
L’intersection des 2 diamètres donne le centre K



Nettoyons un peu, on ne garde que les diamètres et le centre…

L'arc de cercle de centre E passant par K coupe le cercle aux points M et L, qui sont sur la médiatrice de KE et celle-ci nous permet de trouver le point N, milieu de KE.

Vous sentez venir $\frac{\sqrt{5}}{2}$?



On se souvient que le rayon mesure 1

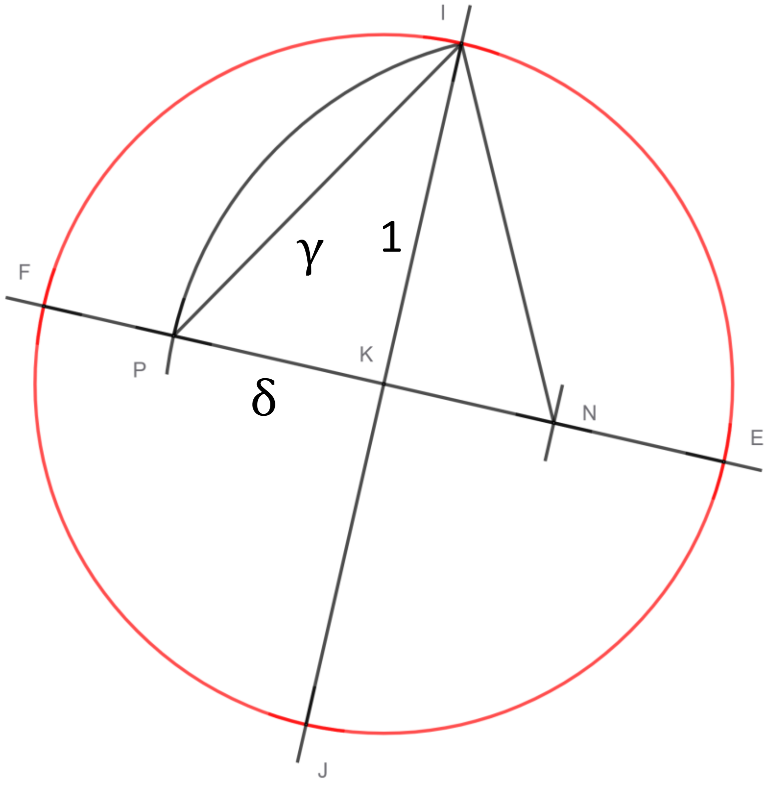
Dans le triangle rectangle IKN, un côté de l'angle droit vaut 1 et l'autre vaut $\frac{1}{2}$.

Le carré du côté IN vaut donc $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

Et donc IN vaut $\frac{\sqrt{5}}{2}$, comme PN

Donc PK vaut $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$, soit $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, soit δ

(la longueur de la corde qui sous-tend $\frac{1}{10}$ de cercle)



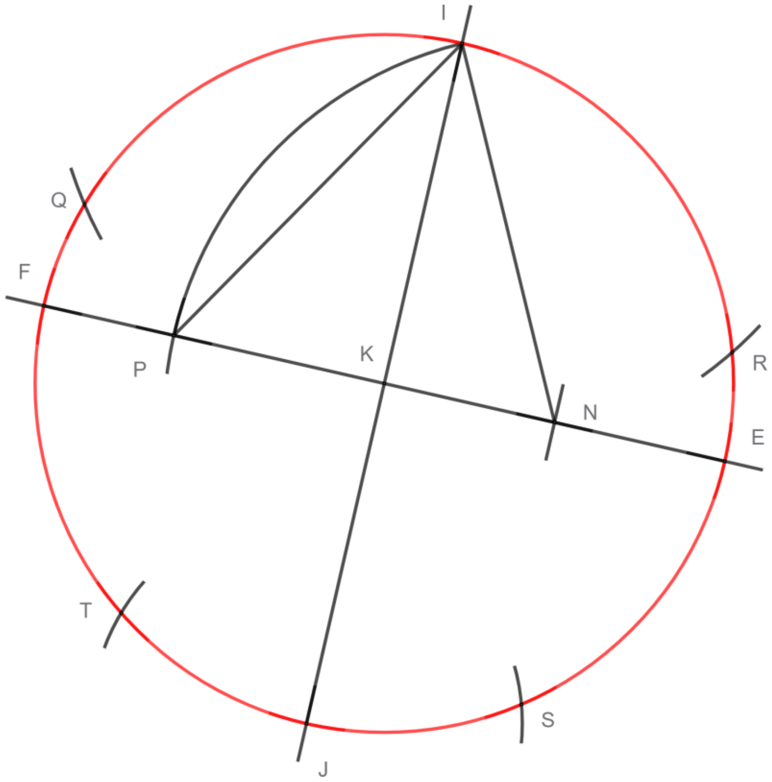
Dans le triangle rectangle IKP,

un côté de l’angle droit vaut 1 et l’autre vaut δ

Le carré du côté IP vaut donc $1 + \delta^2$

Et la longueur de IP est $\sqrt{1 + \delta^2}$

(γ la longueur de la corde qui sous-tend $\frac{1}{5}$ de cercle)



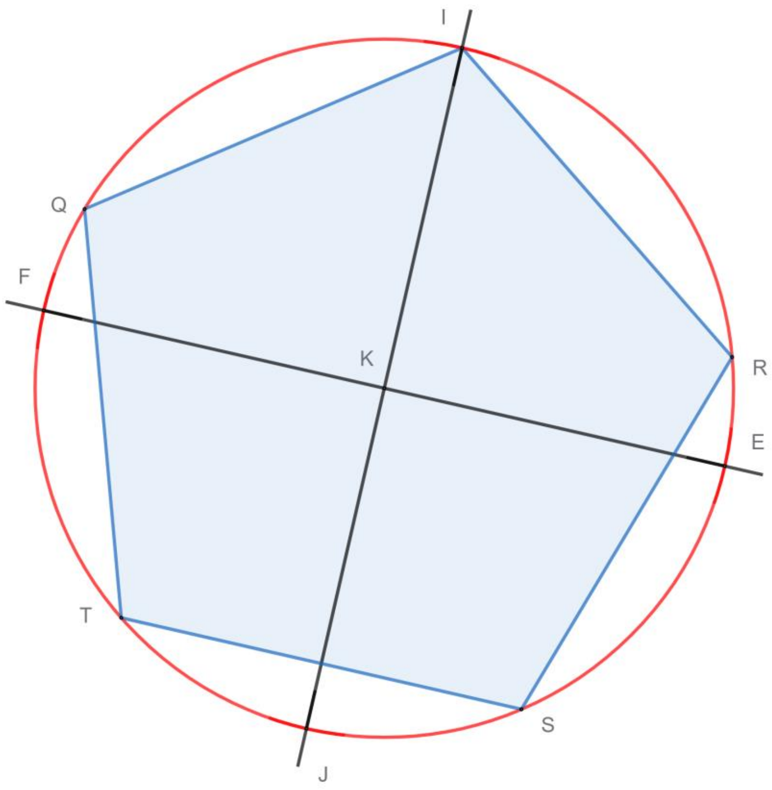
On peut maintenant reporter la distance IP (γ)

de part et d'autre de I pour trouver Q et R

à $\frac{1}{5}$ de cercle de I et reporter encore IP après Q et R pour trouver S et T

Ou alors, trouver S et T à la distance KP (δ) de J

Puisque J est à $\frac{3}{10}$ de cercle de Q et R



Et voilà!

Et maintenant, sans la règle!

Qu’en pense Gemini (l’IA de Google)?

bonjour,
comment découper un cercle en 5 avec seulement un compas?

Bonjour ! C'est une excellente question de géométrie.

Il est **impossible** de diviser un cercle en 5 parties égales (c'est-à-dire tracer les 5 sommets d'un pentagone régulier inscrit) en utilisant **seulement un compas** (construction de Mascheroni).

Pour cette construction, il faut impérativement une **règle (non graduée) en plus du compas**. C'est une construction classique à la règle et au compas, qui est liée à la construction d'un pentagone régulier, l'une des figures les plus fascinantes de la géométrie euclidienne.

ChatGPT est moins catégorique et fournit une réponse assez amusante:

bonjour, comment découper un cercle en 5 avec seulement un compas?

Diviser un cercle en cinq parties égales en utilisant uniquement un compas est une tâche délicate, car cela nécessite également l'utilisation d'une règle pour certaines étapes, notamment pour tracer des lignes droites et mesurer des distances.

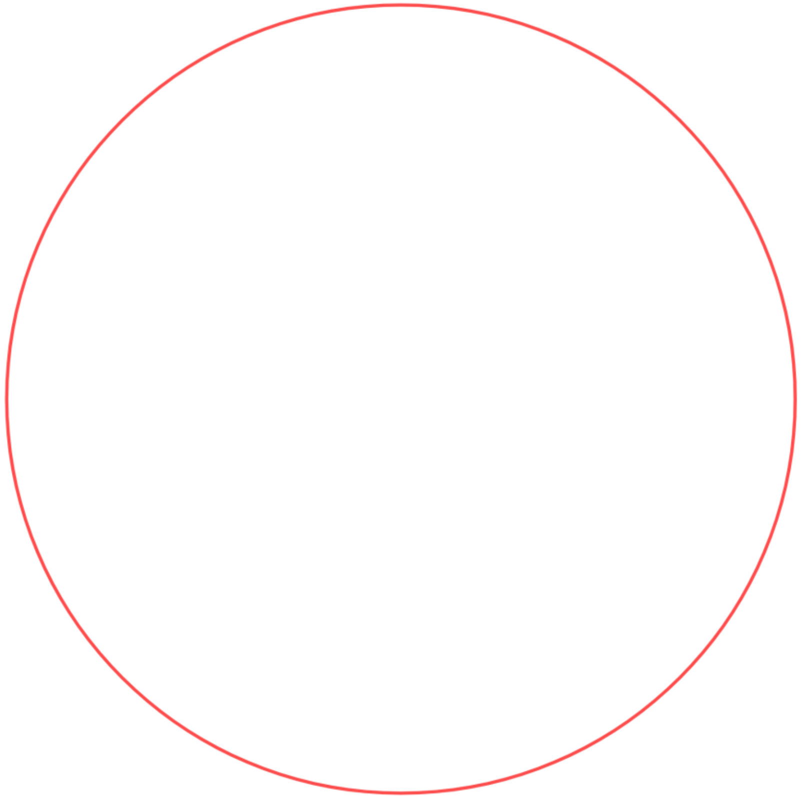
Gemini mentionne une
“construction de Mascheroni”…

Qui est-ce?

L’abbé Lorenzo Mascheroni
(13 mai 1750 à Bergame – 14 juillet 1800 à Paris)
est un géomètre italien, député de la République cisalpine.
Il enseigne les lettres avant de se tourner vers les mathématiques.

Il démontre en 1797 que tout point du plan constructible à la règle et au compas l'est également au compas seul.

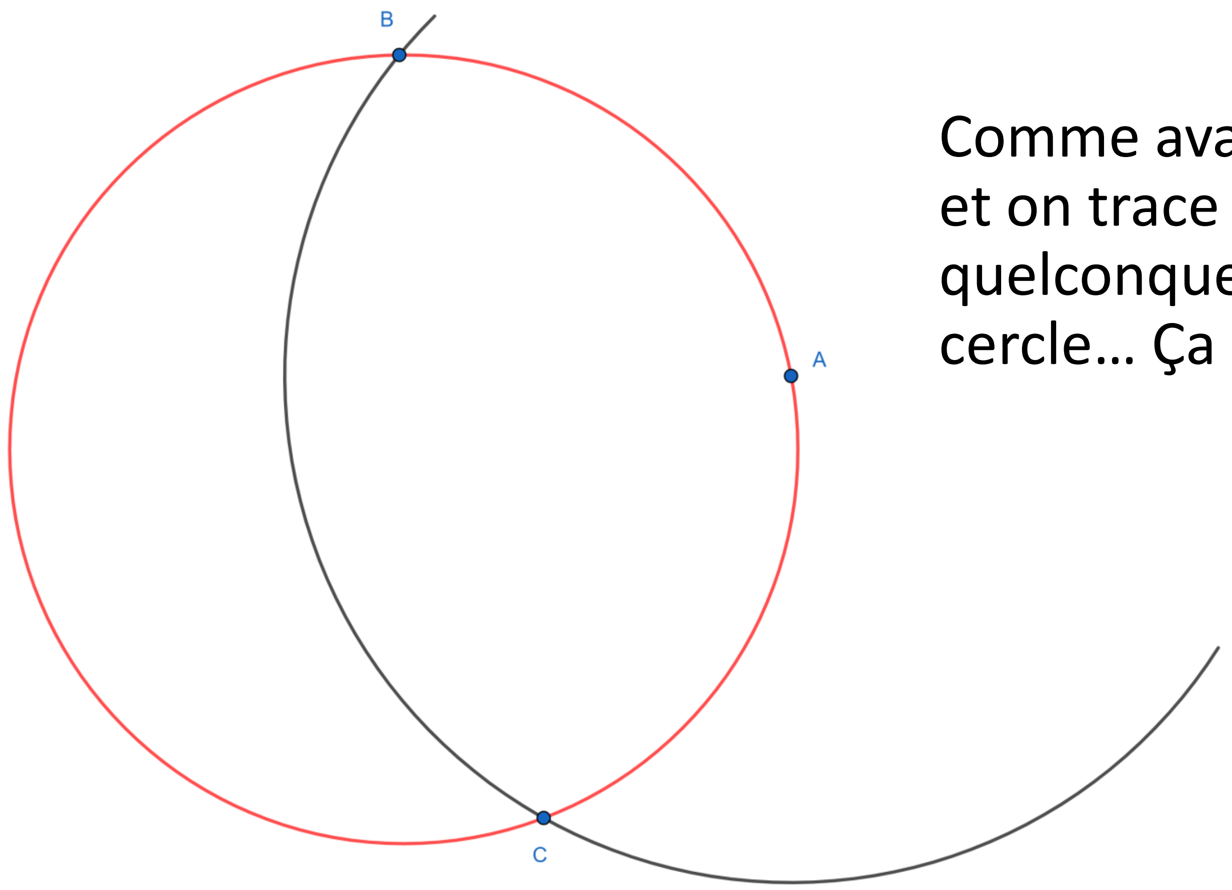
Il est surprenant de voir l’IA Gemini le citer et en même temps déclarer:
“Il est **impossible**…”



Donc re-voilà notre joli cercle…

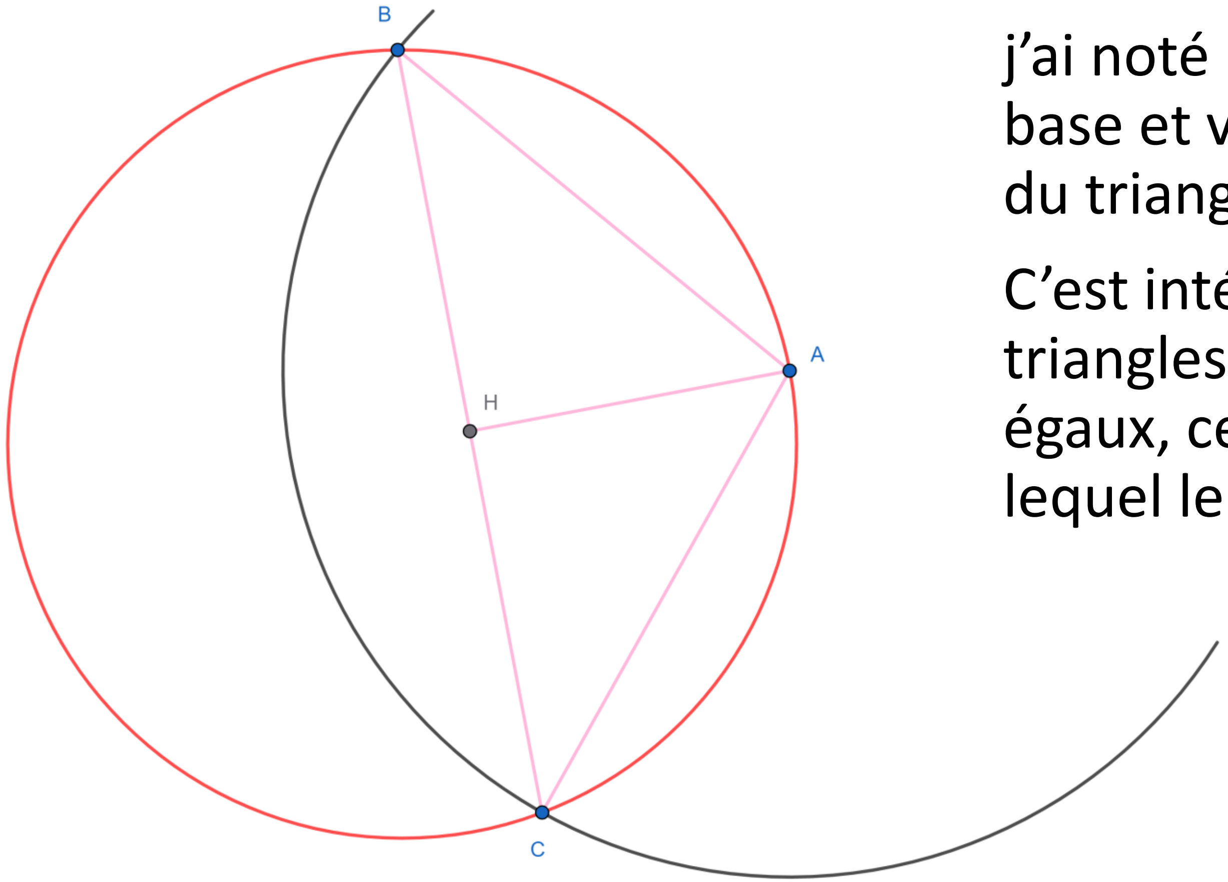
Et cette fois nous allons chercher le centre sans utiliser la règle… seulement le compas!

Stratégie: construire deux points distants de la longueur du rayon



Comme avant, on choisit un point A sur le cercle et on trace un arc de cercle avec un rayon quelconque mais plus petit que le diamètre du cercle… Ça nous donne les points B et C…

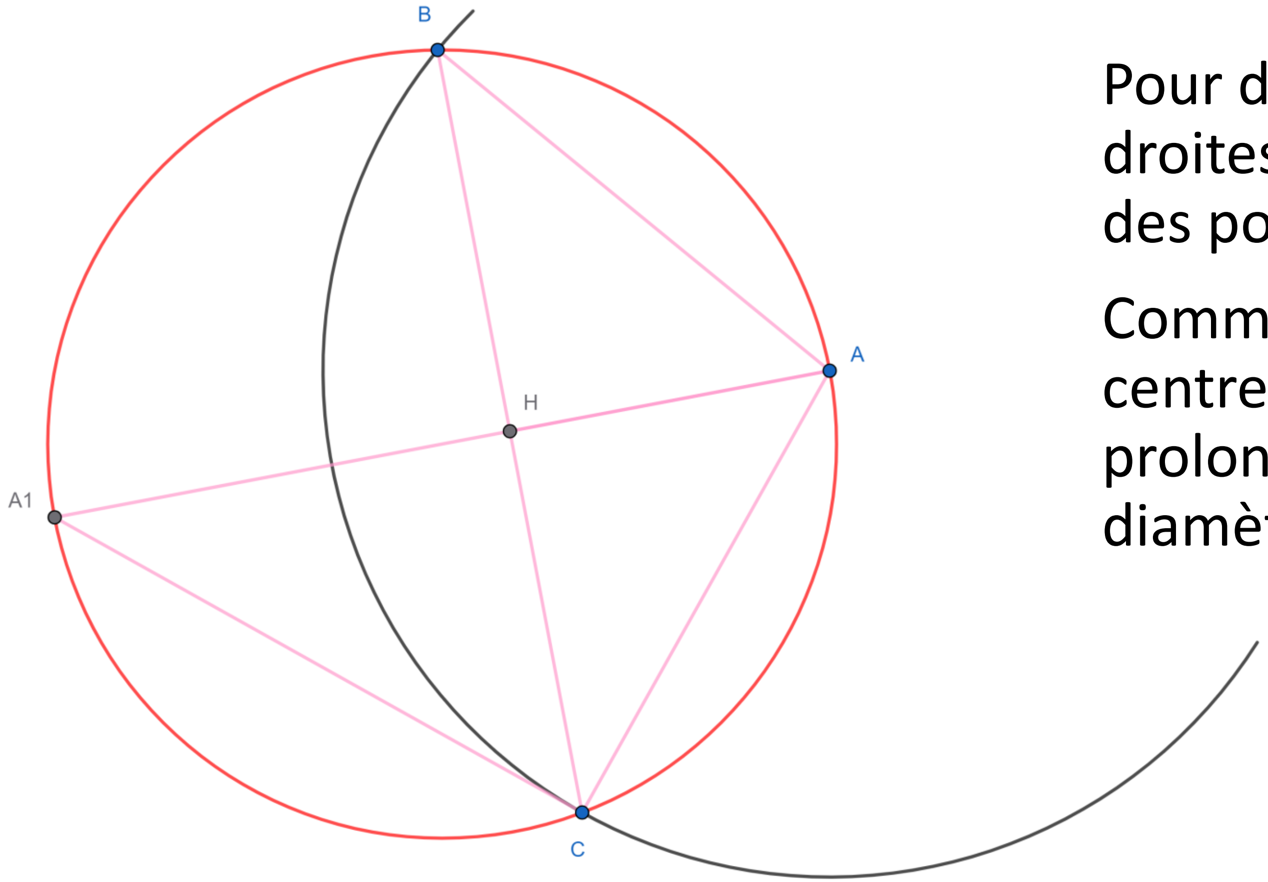
… et accessoirement un triangle isocèle inscrit dans notre cercle!



Le voilà… ([AB]=[AC])

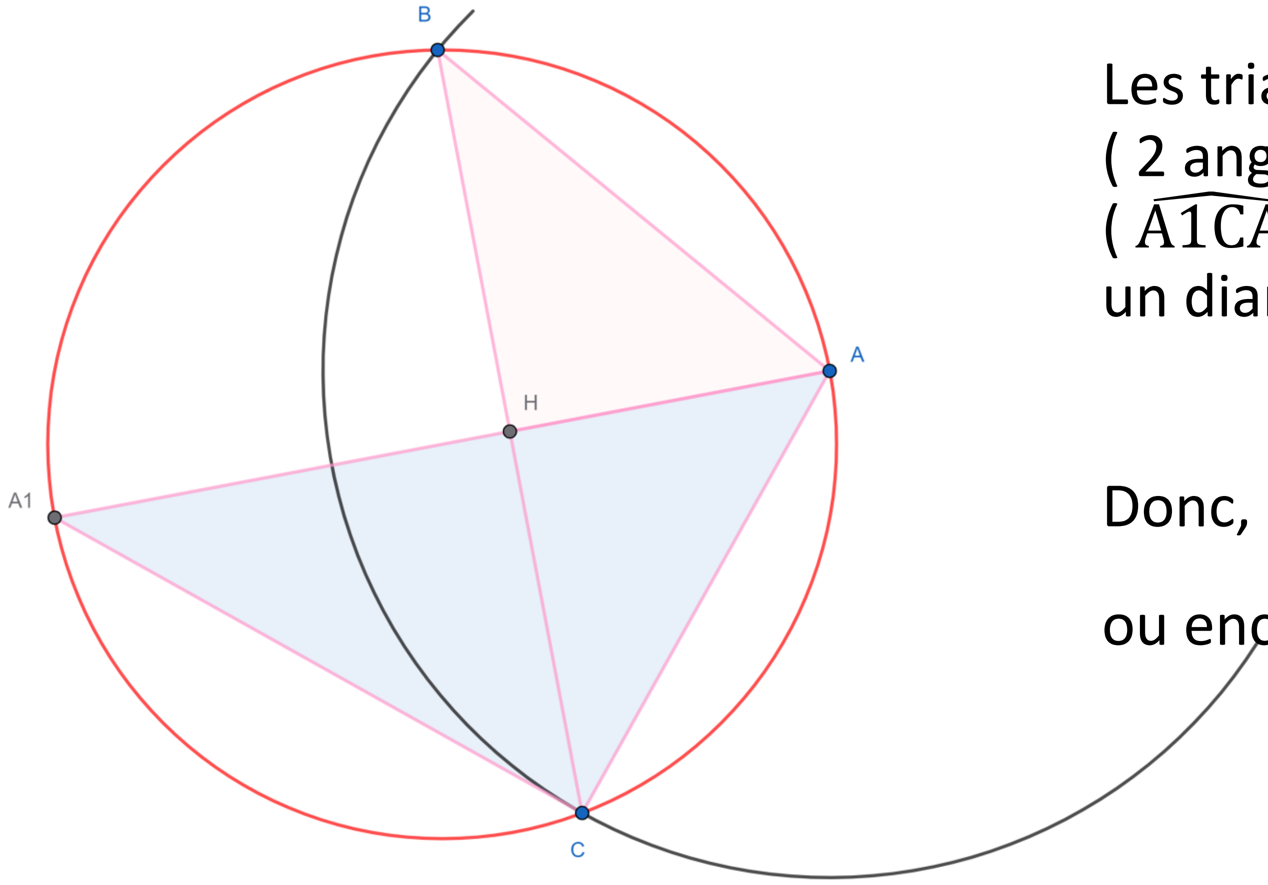
j’ai noté la position H qui indique le milieu de la base et visualise la hauteur par rapport à ce 3e côté du triangle.

C’est intéressant car il existe une propriété des triangles isocèles qui lie la longueur des côtés égaux, cette hauteur et le rayon du cercle dans lequel le triangle est inscrit.



Pour démontrer la propriété je visualise des droites, mais je ne les utilise pas pour construire des points dont je me servirai après!

Comme la droite [AH] est médiatrice de [BC], le centre du cercle se trouve dessus et le prolongement donne le point A1, et [AA1] est un diamètre et mesure 2 fois le rayon.

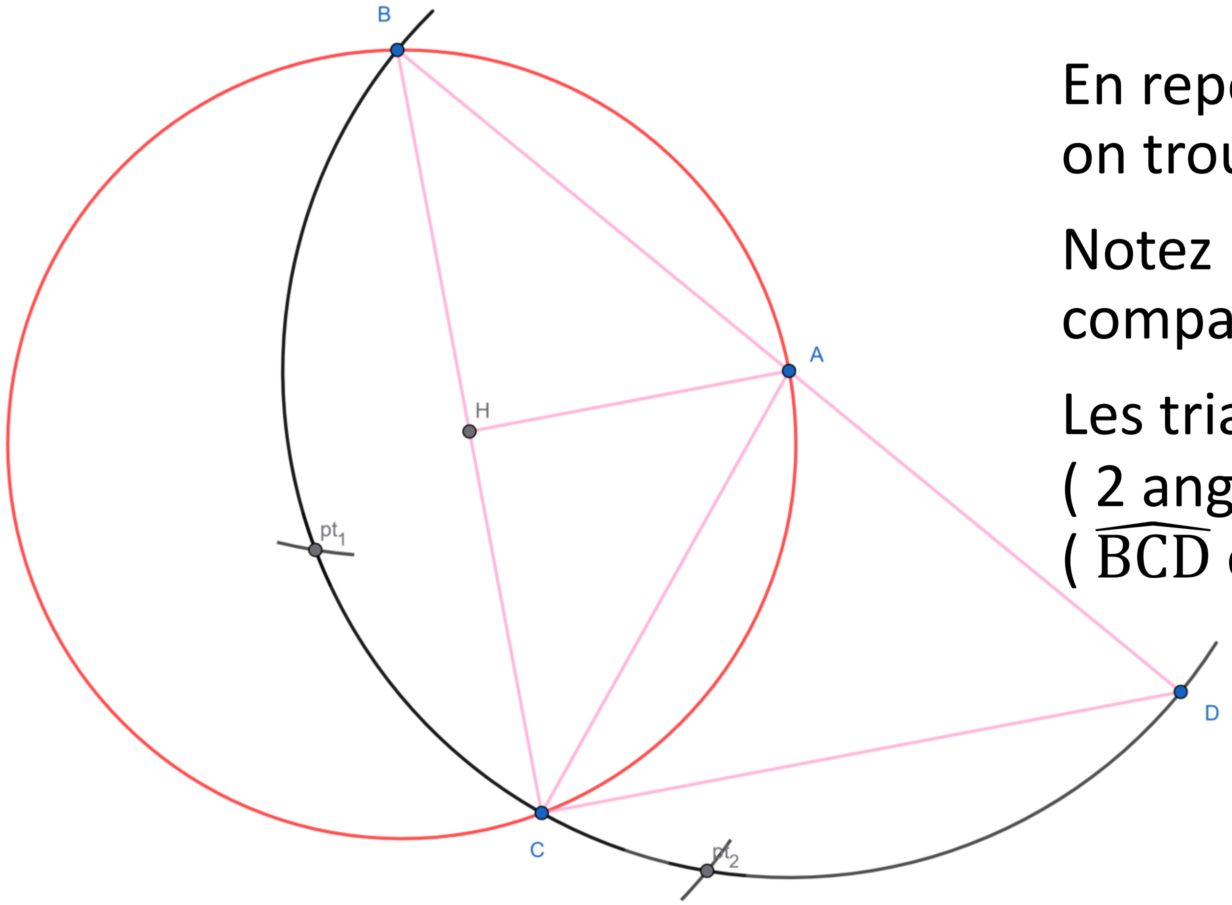


Les triangles bleu clair et rose sont semblables
(2 angles égaux: $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$ et $\widehat{BHA} = \widehat{A1CA}$)
($\widehat{A1CA}$ est droit car un côté du triangle A1CA est un diamètre)

Donc, $\frac{[AB]}{[AH]} = \frac{[A1A]}{[AC]}$

ou encore, [AB] x [AC] = 2 x rayon x [AH]

$$\text{rayon} = \frac{[AB] \times [AC]}{2 \times [AH]}$$



En reportant 3x la distance [AB] le long de l’arc, on trouve le point D diamétralement oppose à B

Notez bien que nous avons construit D avec le compas seulement…

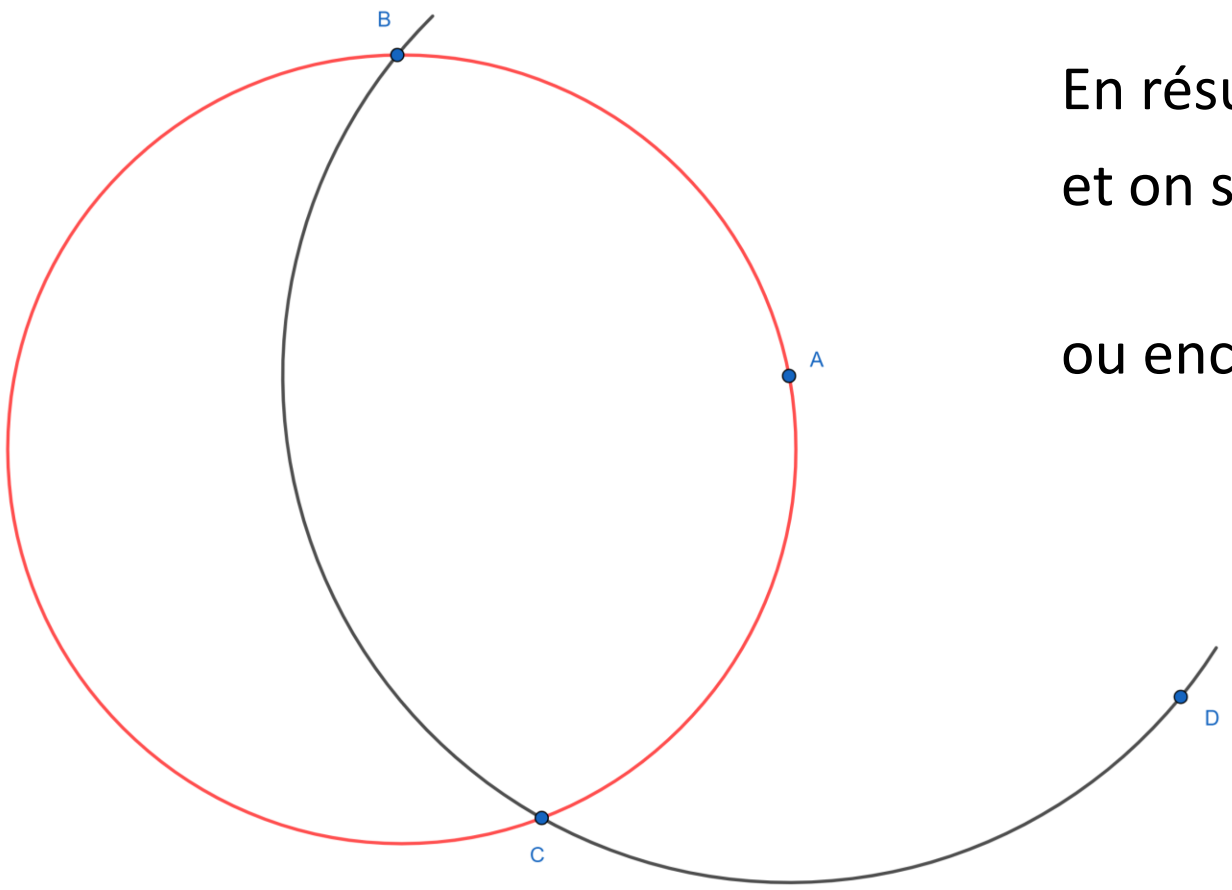
Les triangles AHB et DCB sont semblables
(2 angles égaux: $\widehat{ABH} = \widehat{DBC}$ et $\widehat{BHA} = \widehat{BCD}$)
($\widehat{BCD}$ est droit car intercepte un diamètre)

et donc

[CD] vaut 2x [AH]

(2x car [DB] vaut 2x [AB])

$$\text{rayon} = \frac{[AB] \text{ x } [AC]}{[CD]}$$

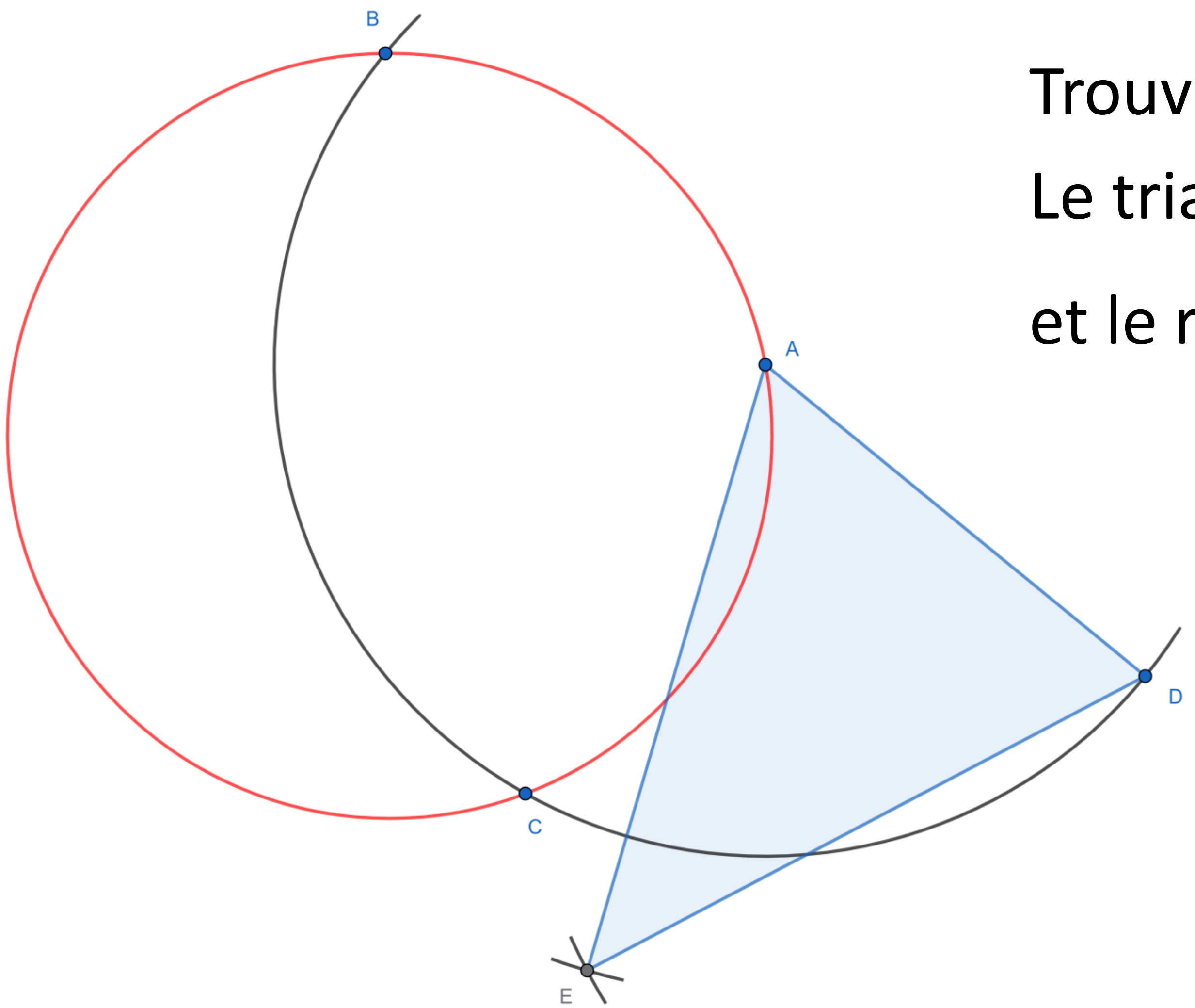


En résumé, on a construit A, B, C et D au compas

et on sait que rayon x [CD] = [AB] x [AC]

ou encore $\frac{\text{rayon}}{[AB]} = \frac{[AC]}{[CD]}$

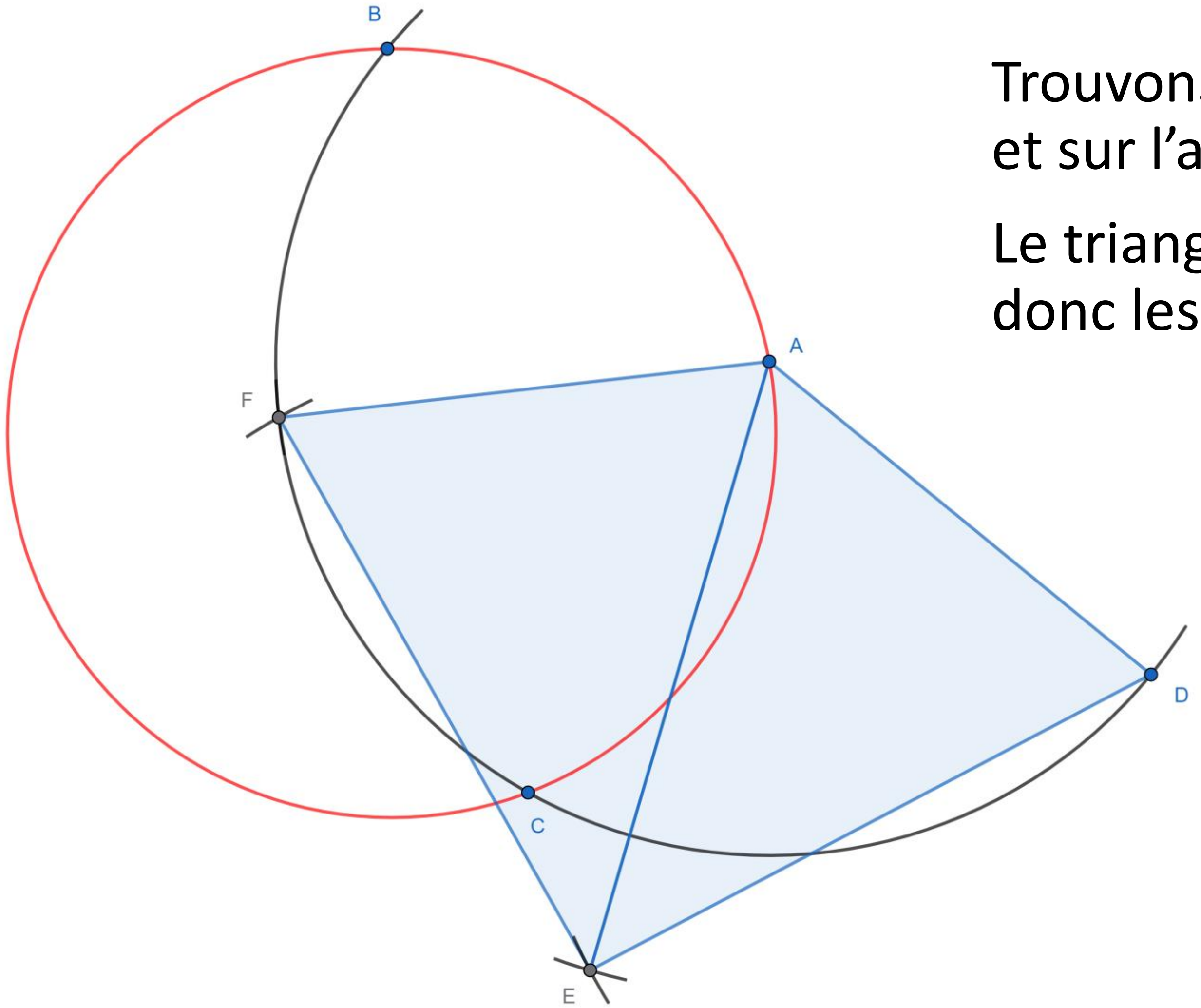
Cette égalité de rapports nous rappelle les triangles semblables, si possible isocèles car ils facilitent les calculs sur les angles
(un seul angle définit la forme)



Trouvons E à la distance [CD] de A et D

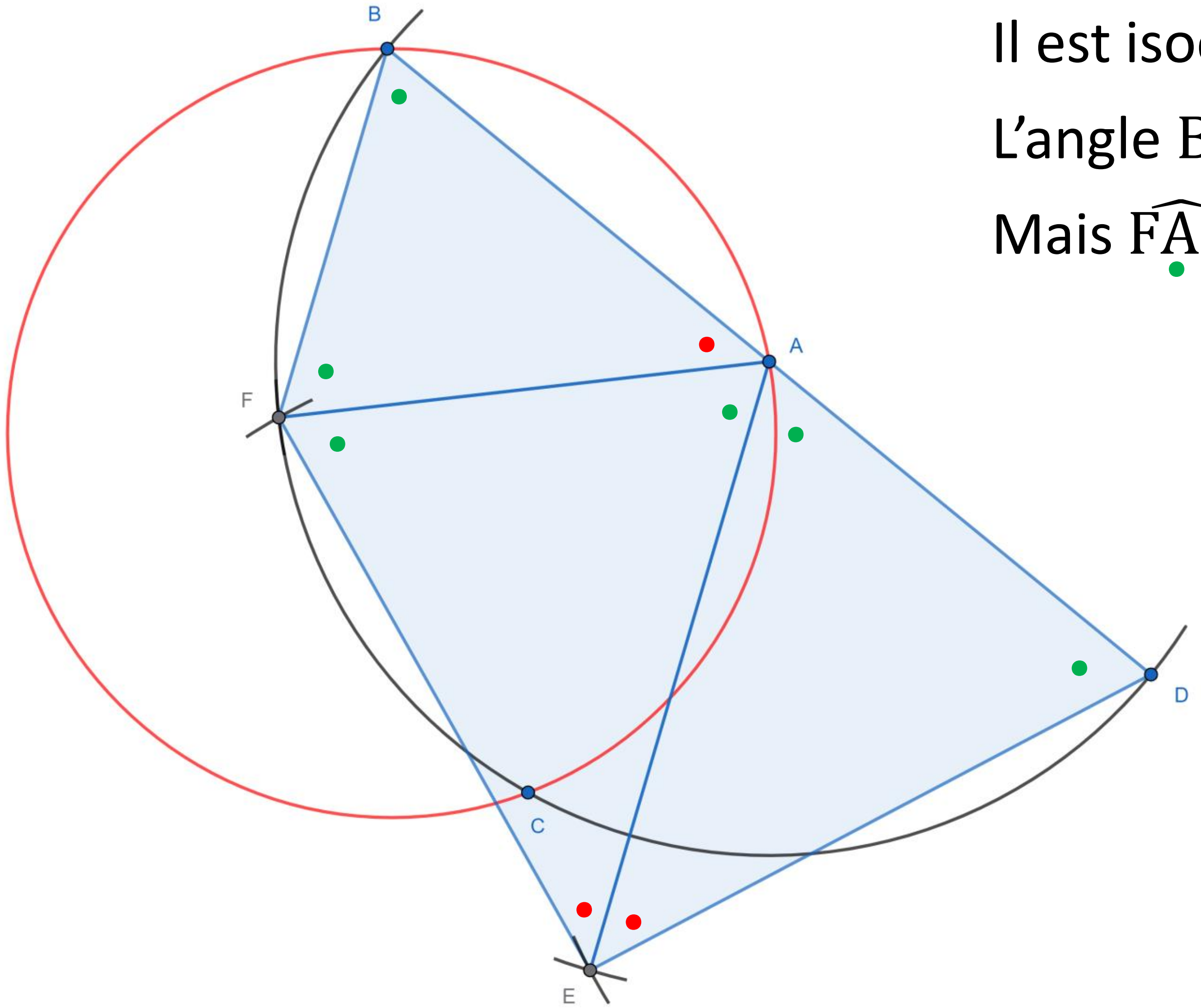
Le triangle AED est isocèle ([AE]=[DE])

et le rapport $\frac{[AD]}{[AE]} = \frac{[AC]}{[CD]}$



Trouvons F, à la même distance [CD] de E
et sur l’arc (BCD)

Le triangle AEF a les mêmes mesures que AED
donc les angles correspondants sont égaux



Regardons maintenant le “petit” triangle ABF…

Il est isocèle car [AB] = [AF]

L’angle $\widehat{BAF} = 180^o - \widehat{FAE} - \widehat{EAD}$

Mais $\widehat{FAE} = \widehat{ADE}$, donc $\widehat{BAF} = \widehat{AED}$ (= $\widehat{FEA}$)

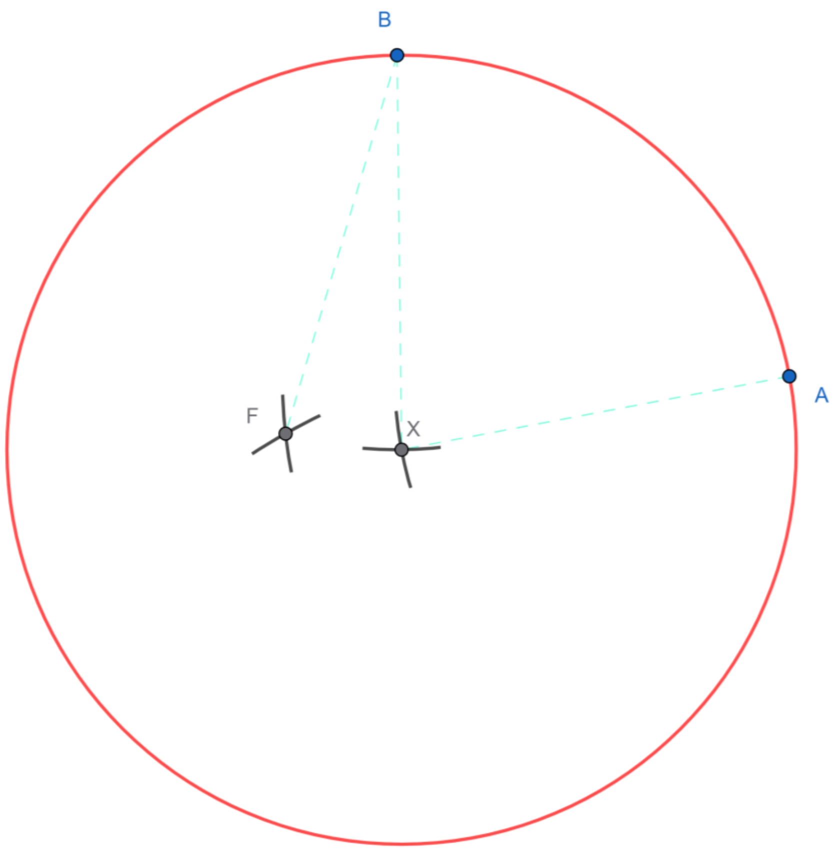
Et les 3 triangles sont semblables

Donc $\frac{[BF]}{[AB]} = \frac{[AD]}{[ED]} = \frac{[AC]}{[CD]}$

et $[BF] = \frac{[AC]x\,[AB]}{[CD]}$

mais on avait rayon = $\frac{[AB]\ x\ [AC]}{[CD]}$

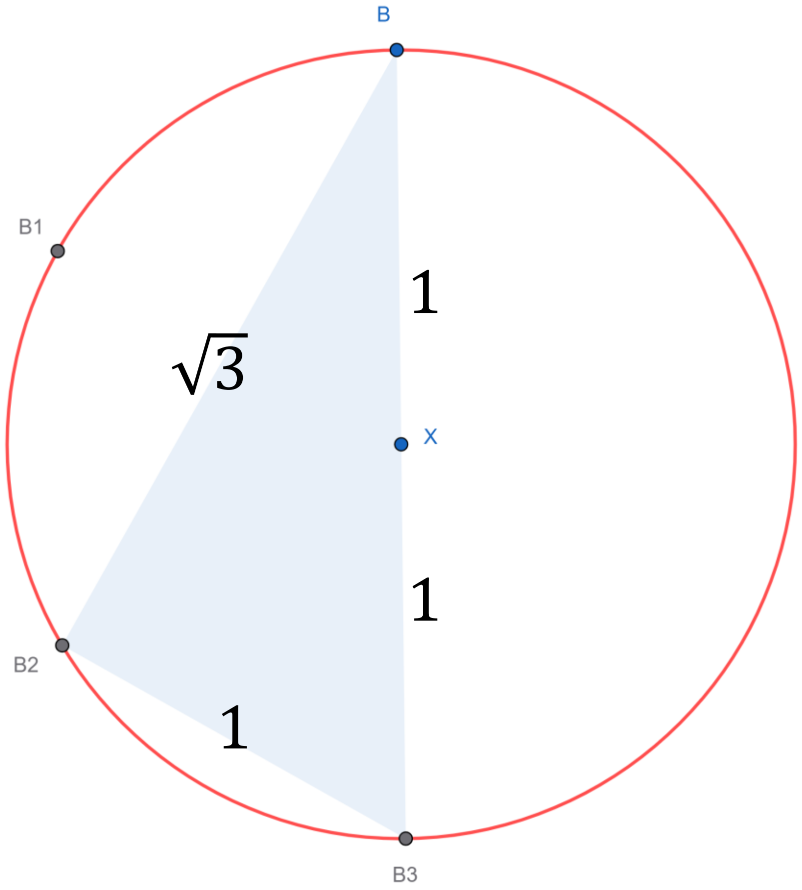
Donc nous avons trouvé [BF] = rayon



Re-Nettoyons un peu…

Voilà X le centre du cercle

Et maintenant, essayons de diviser le cercle en 5, c’est à dire, de “construire” γ et éventuellement δ



Ne gardons que le cercle, un point et le centre,

Reportons 3x le rayon et observons…

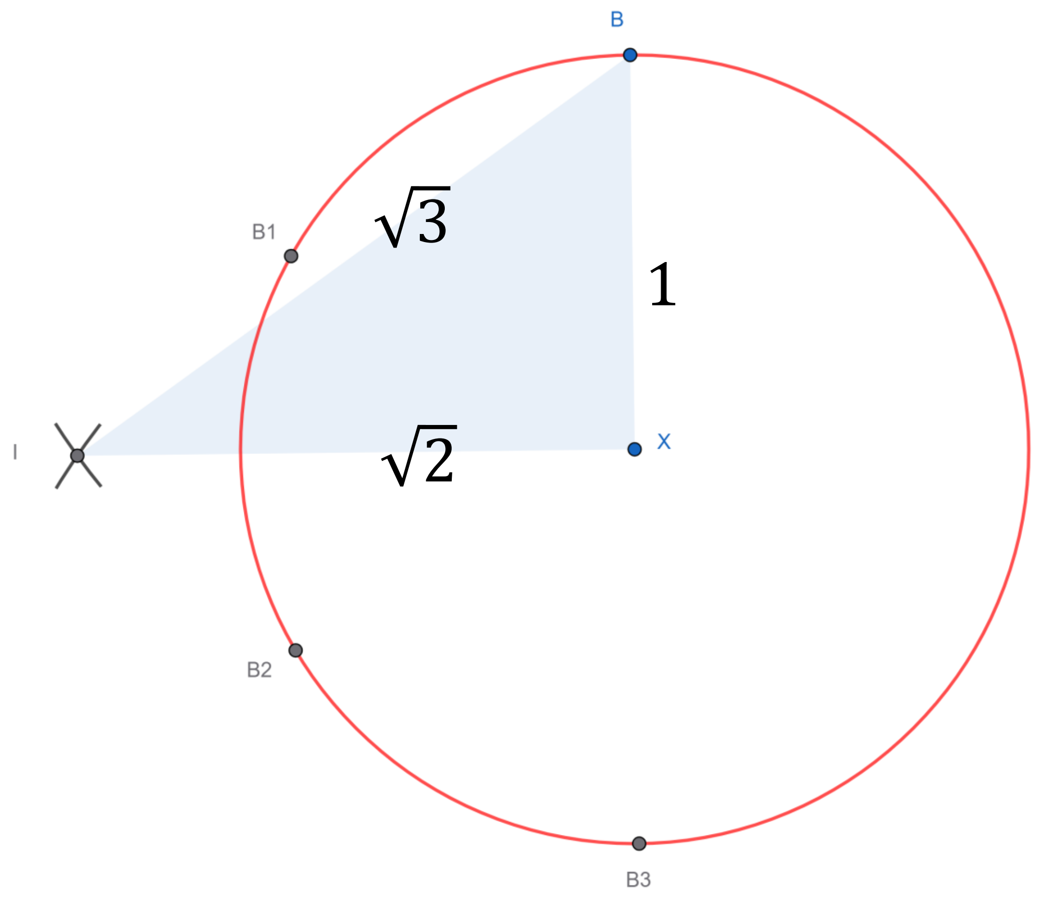
Le triangle B-B2-B3 est rectangle (diamètre)

Donc $[BB2]^2 + [B2B3]^2 = 4$

Mais $[B2B3] = 1$, donc $[BB2]^2 + 1 = 4$,

$[BB2]^2 = 3$ et $[BB2] = \sqrt{3}$

Remarquez que c’est la corde qui sous-tend un angle de 120°



Construisons I à cette distance $\sqrt{3}$ de B et B3

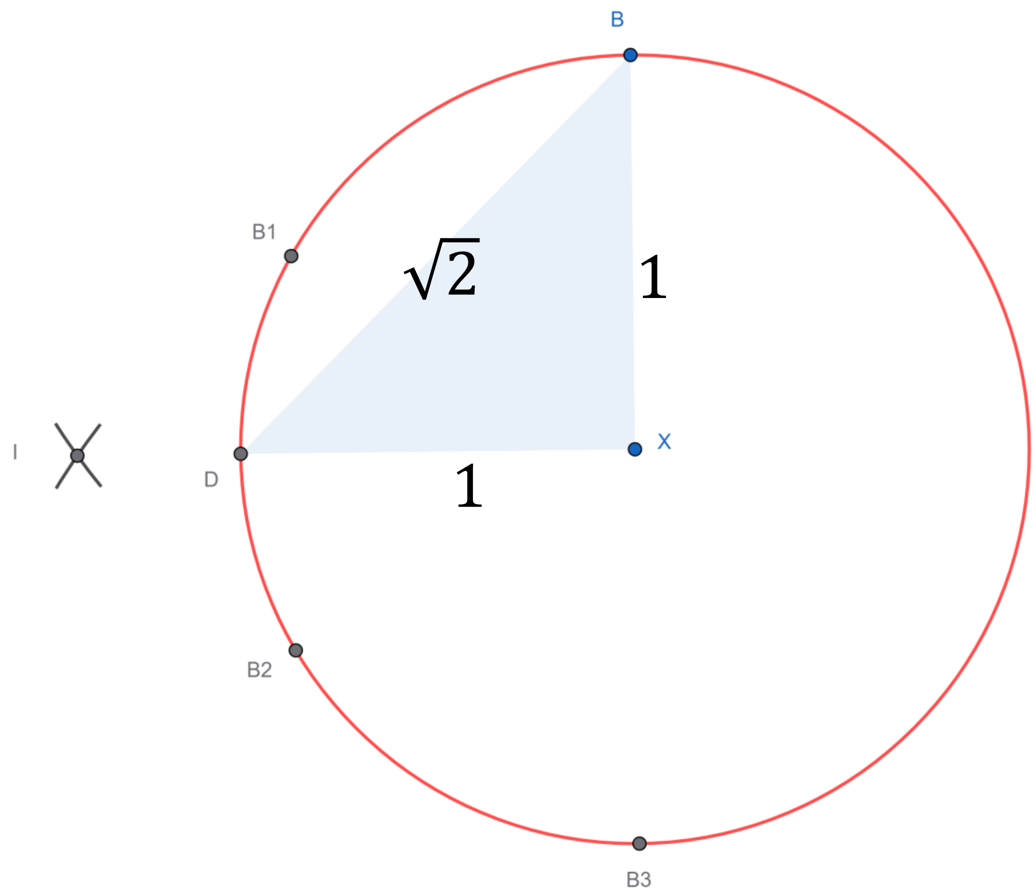
Le triangle B-I-B3 est isocèle

donc le triangle B-I-X est rectangle

Donc $[BX]^2 + [IX]^2 = 3$

Mais $[BX] = 1$, donc $[IX]^2 = 2$

et $[IX] = \sqrt{2}$



Construisons D sur le cercle

et à cette distance $\sqrt{2}$ de B

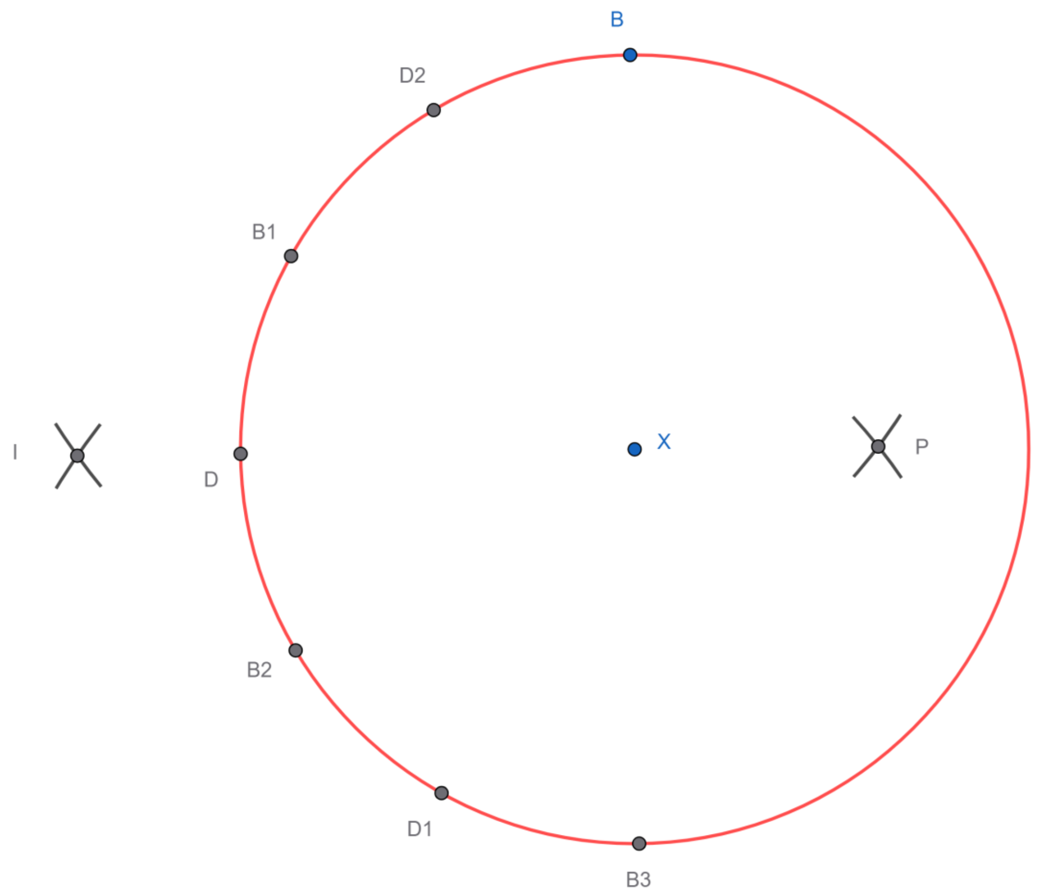
Le triangle B-D-X est rectangle

car $[BD]^2 = 2 = [BX]^2 + [XD]^2$

et,

l'angle $\widehat{B1XD}$ = 90º - $\widehat{BXB1}$ = 30º

Pareil pour $\widehat{B2XD}$ = 30º

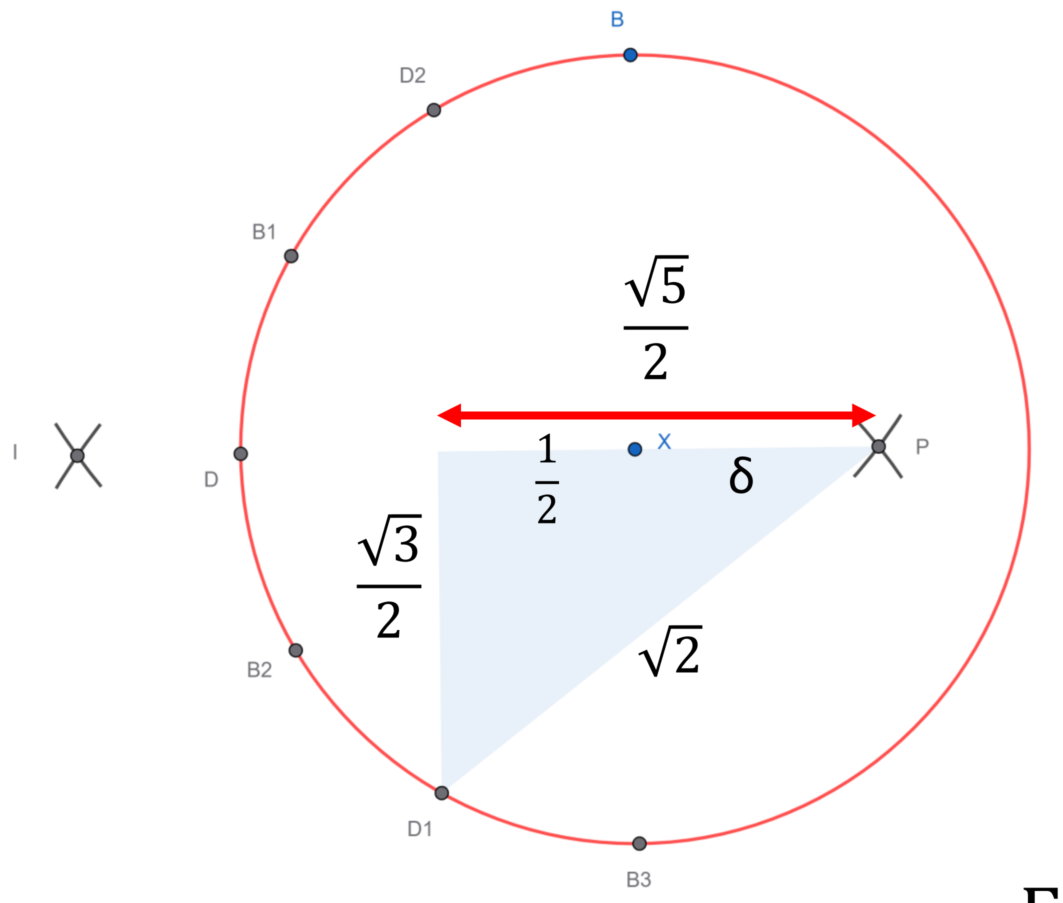


Reportons le rayon de part et d'autre de D

Pour trouver D1 et D2 sur le cercle

Notons que [D1D2] = $\sqrt{3}$ (car $\widehat{D1XD2} = 120°$)

et construisons P à la distance $\sqrt{2}$ de D1 et D2



Regardons le triangle…

Il est rectangle ([DP] médiatrice de [D1D2])

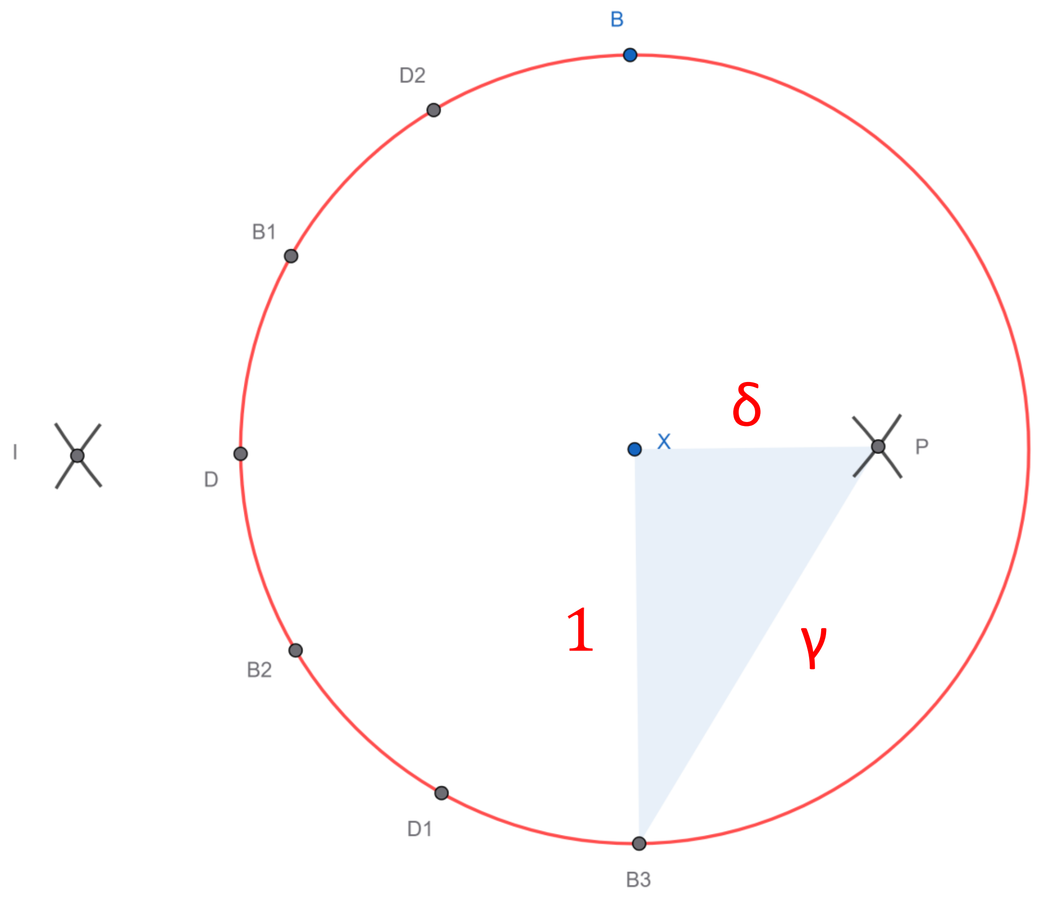
Un côté de l'angle droit mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}$

L'hypoténuse mesure $\sqrt{2}$

L'autre côté mesure donc $\sqrt{2-\frac{3}{4}}$

Soit $\sqrt{\frac{5}{4}}$ ce qui fait $\frac{\sqrt{5}}{2}$

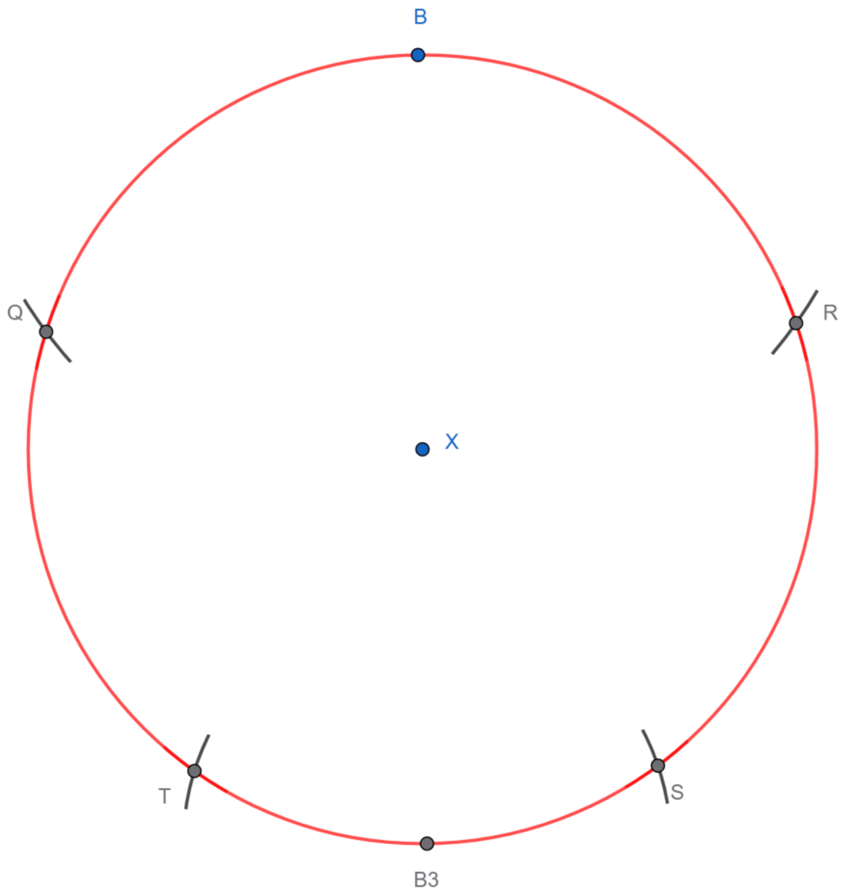
Et donc, [XP] vaut $\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \delta$



Et parce que le triangle B3-X-P est rectangle,

nous retrouvons $\gamma = \sqrt{1 + \delta^2}$

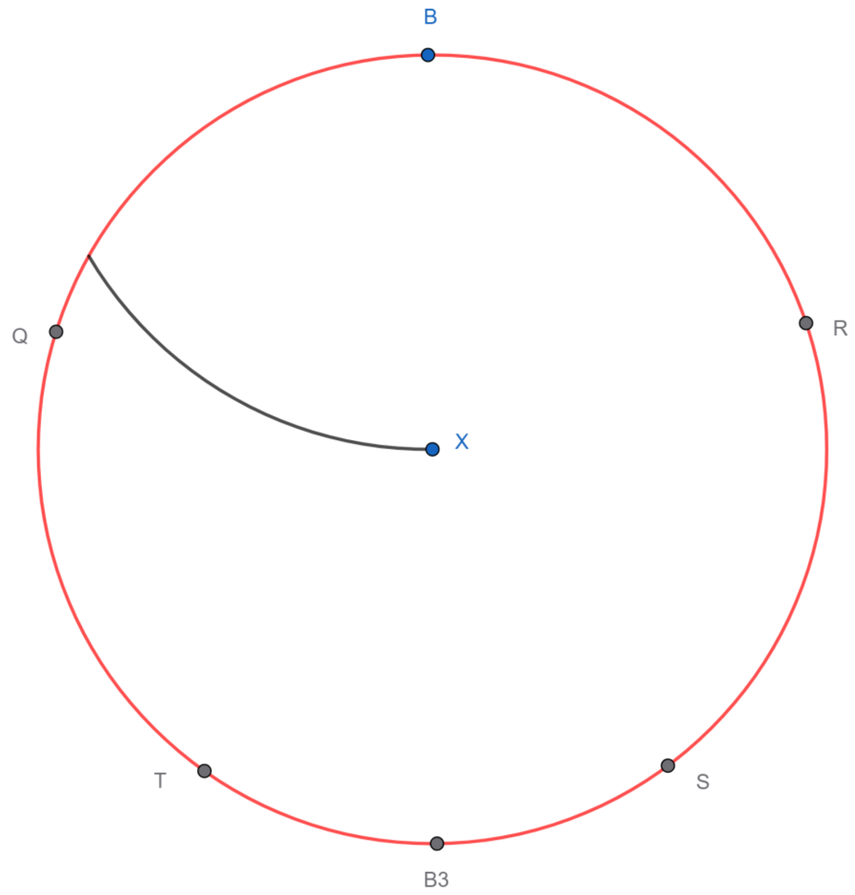
Victoire!



Comme avant, on peut maitenant reporter la distance γ de part et d’autre de B pour trouver Q et R et la distance δ de part et d’autre de B3 pour trouver S et T

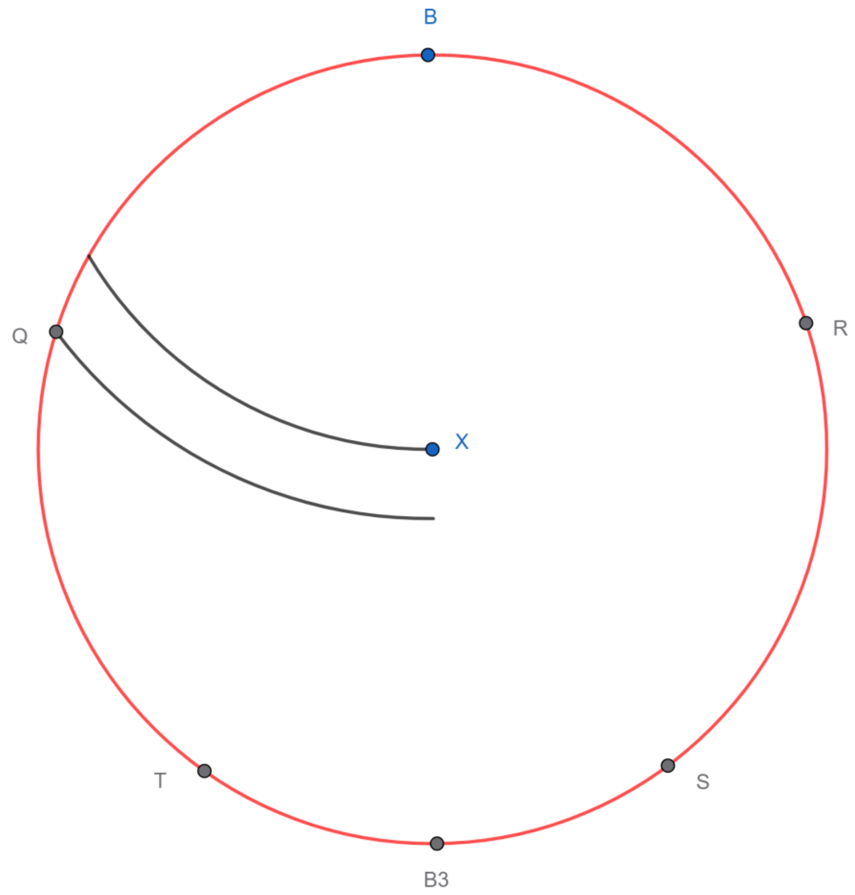
Nous avons divisé le cercle en 5 arcs égaux et marqué les bouts des 5 pétales

Allons-y!



On place la pointe du compas sur B
et la mine sur X, et…

on n'arrive pas au bout du pétale (Q)!



On place la pointe du compas sur B
et la mine sur X, et…

on n’arrive pas au bout du pétale (Q)!

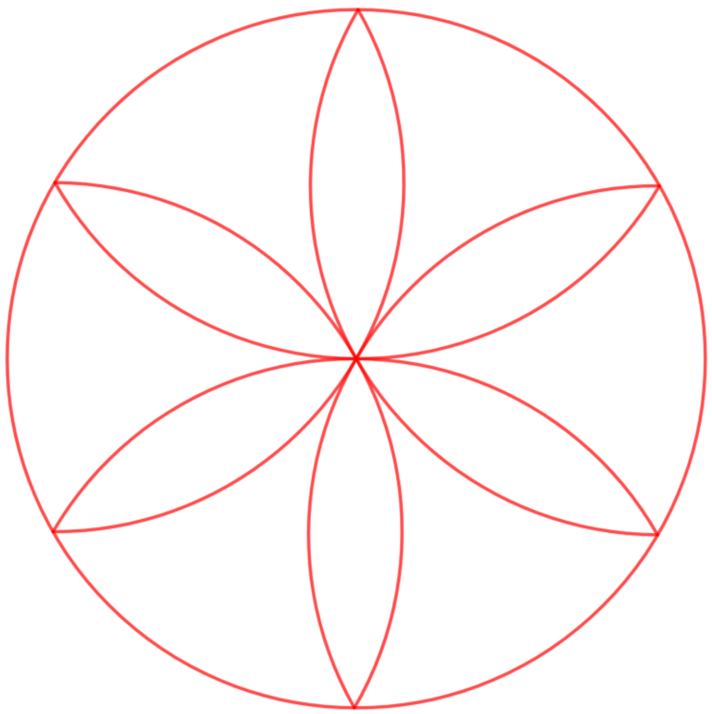
Et avec la mine sur le bout…

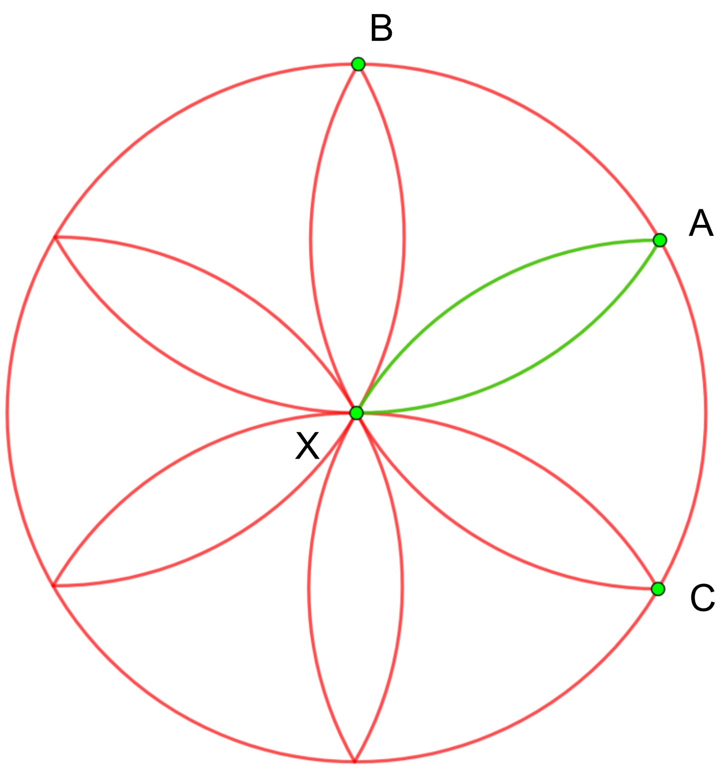
on n’arrive pas au centre!

Que se passe-t-il ??

On ne peut pas faire un arc qui joint
le centre du cercle et au bout du pétale??

Étudions les pétales de la rosace classique…





Le pétale est constitué de 2 arcs qui joignent
le bout (A) au centre (X) du cercle.

Les centres des 2 arcs sont les bouts
des pétales adjacents (B et C)

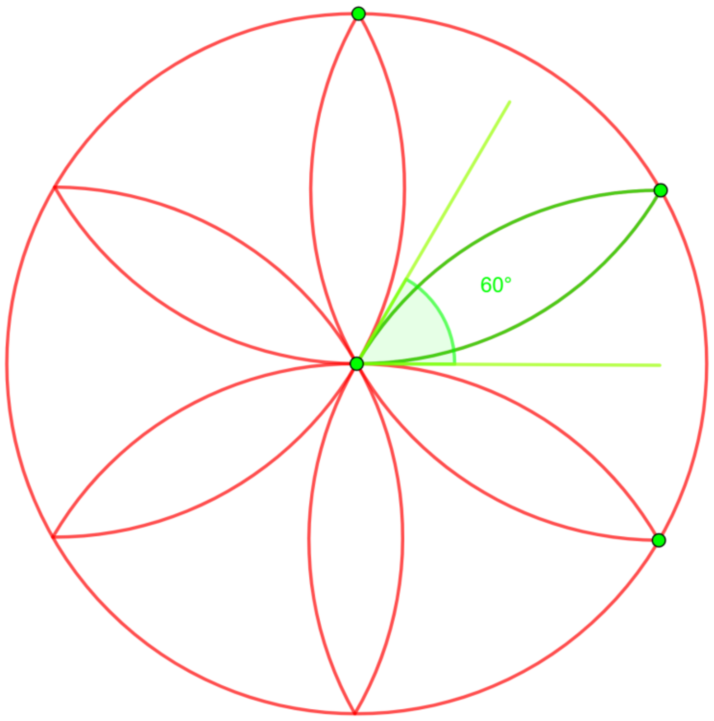
Et ces bouts sont situées à 60^o
de part et d'autre du bout A

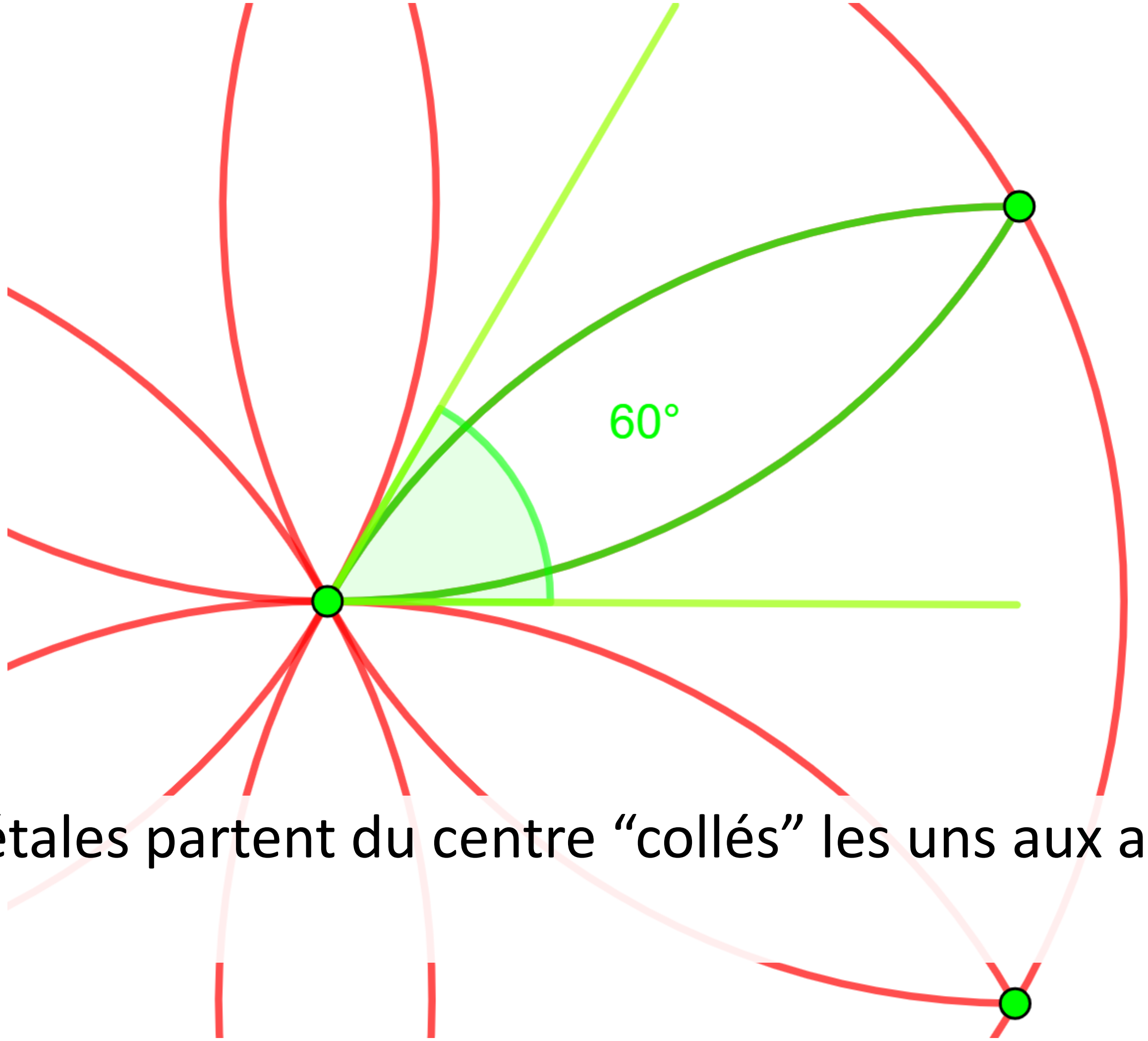
Et c'est pour ça que ça marche!

Avec B à 60^o de A, le triangle A-B-X est équilatéral
et B est sur la médiatrice de [AX].

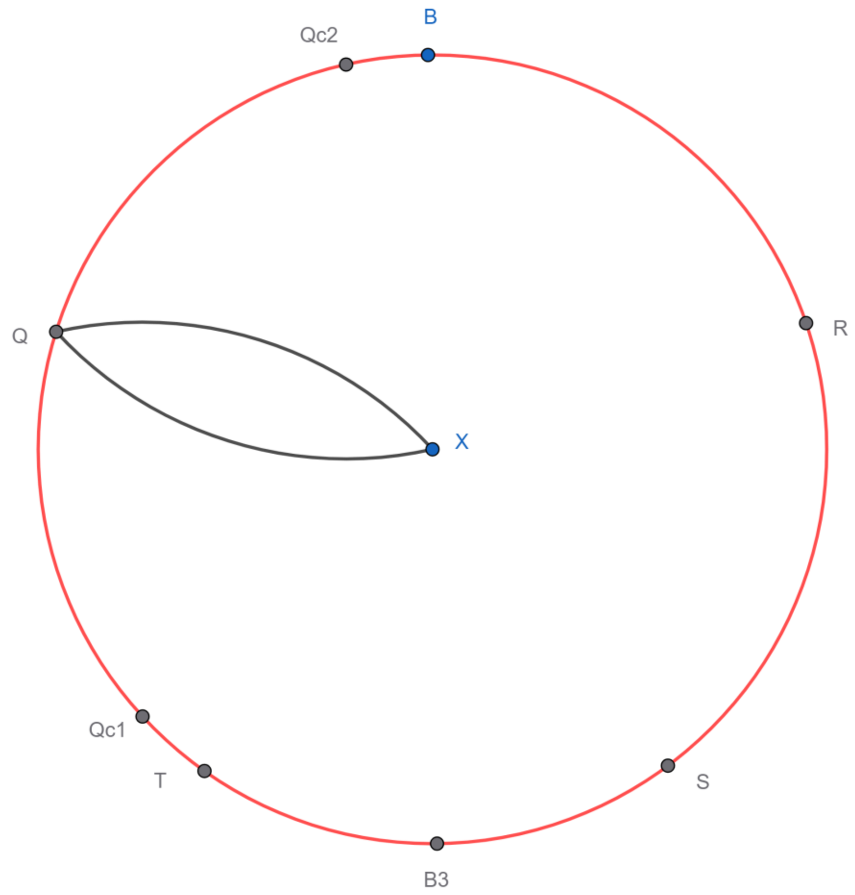
Pour qu'un arc de cercle passe pas 2 points,
il **faut** que son centre soit sur la médiatrice!

Notons encore dans le cas de la rosace “classique”
que le pétale part du centre avec une ouverture de 60°



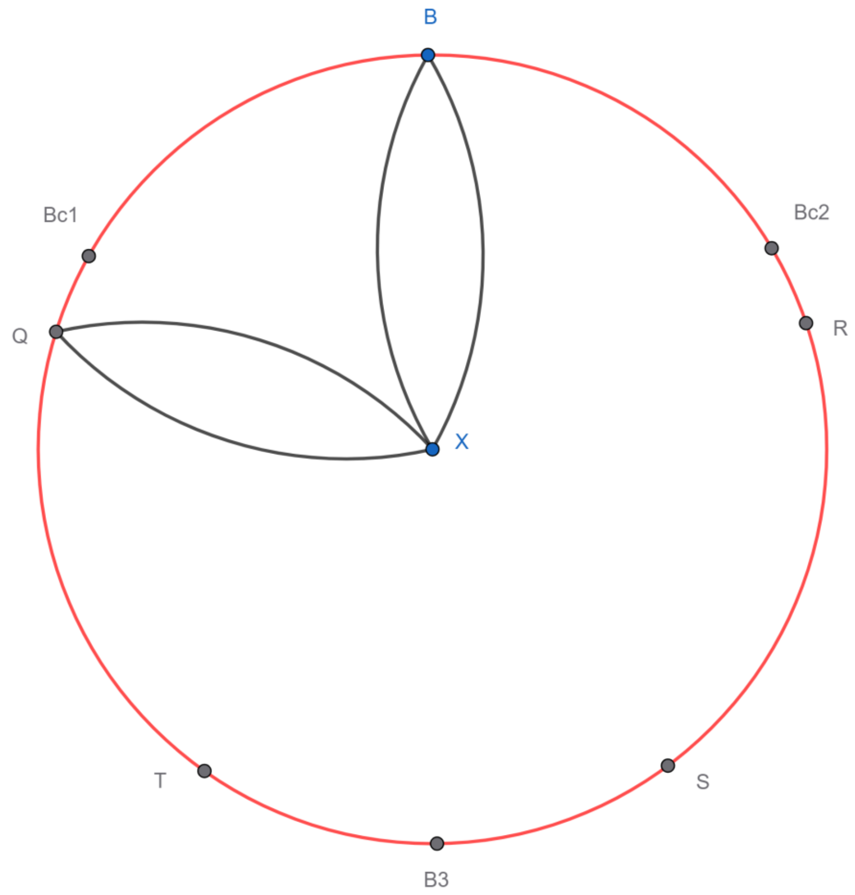


Et que les pétales partent du centre “collés” les uns aux autres

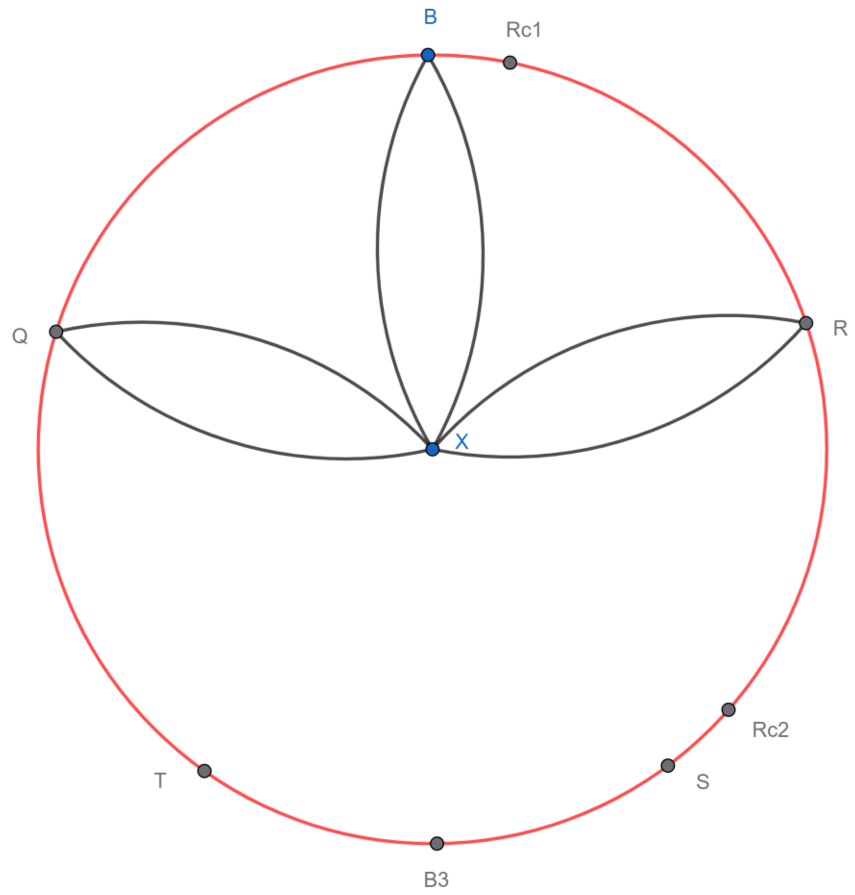


Donc on doit placer la pointe du compas sur un point de la médiatrice de [QX]

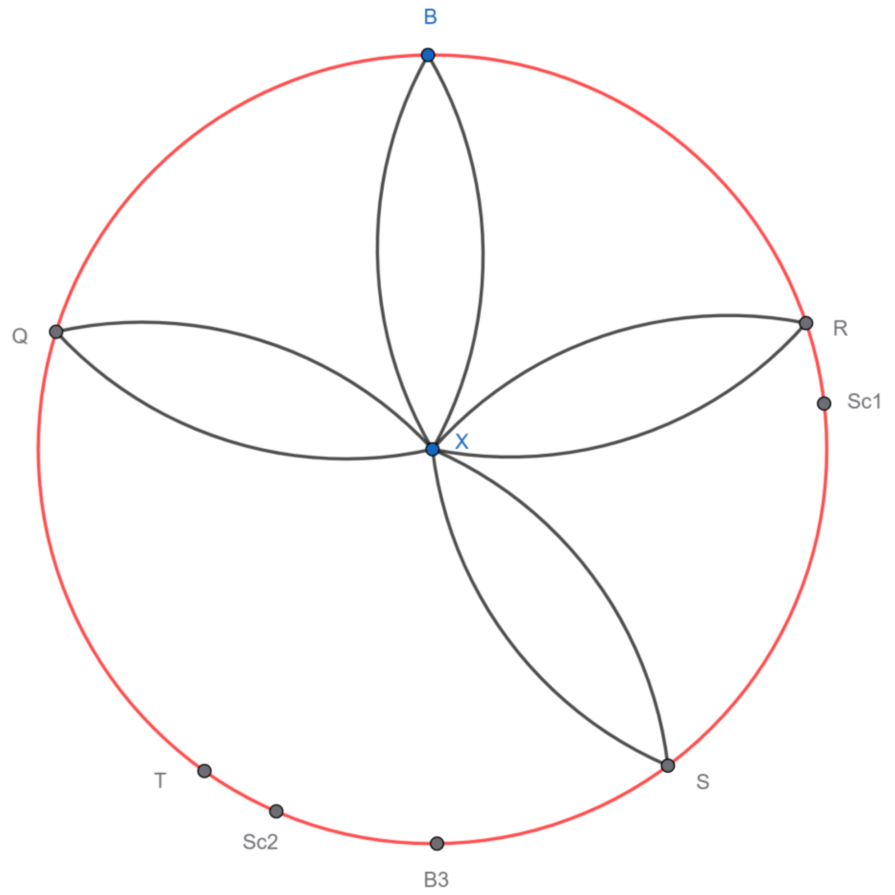
Avec la pointe du compas à 60°
de part et d'autre de Q, ça marche!



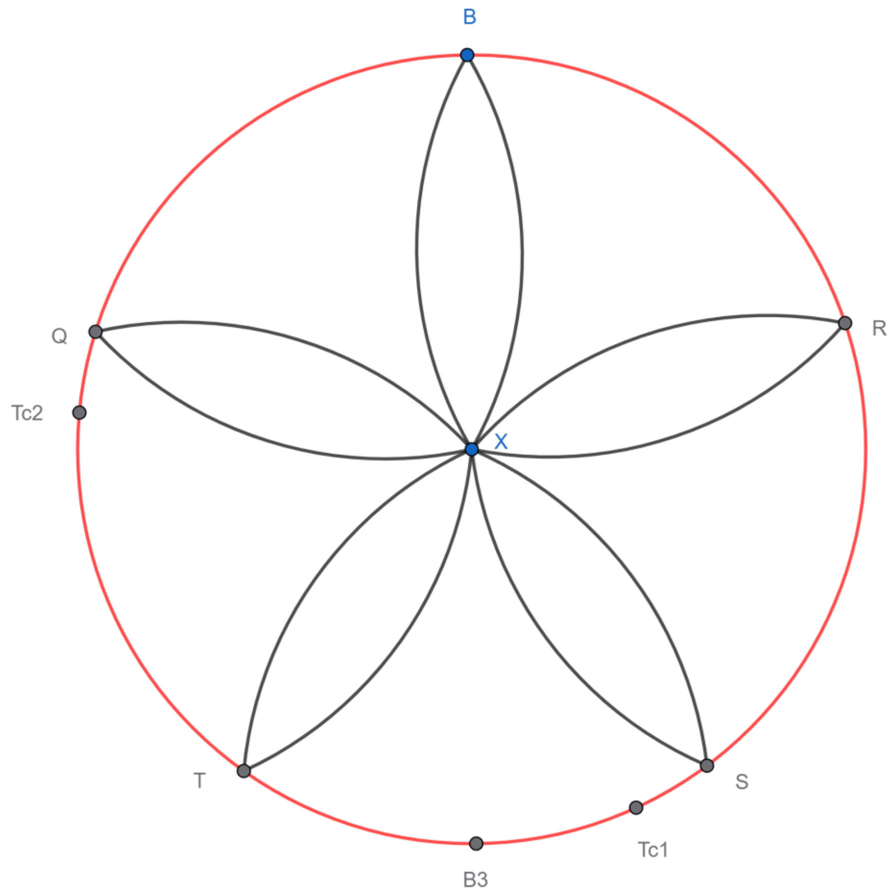
2e pétale



3e pétale



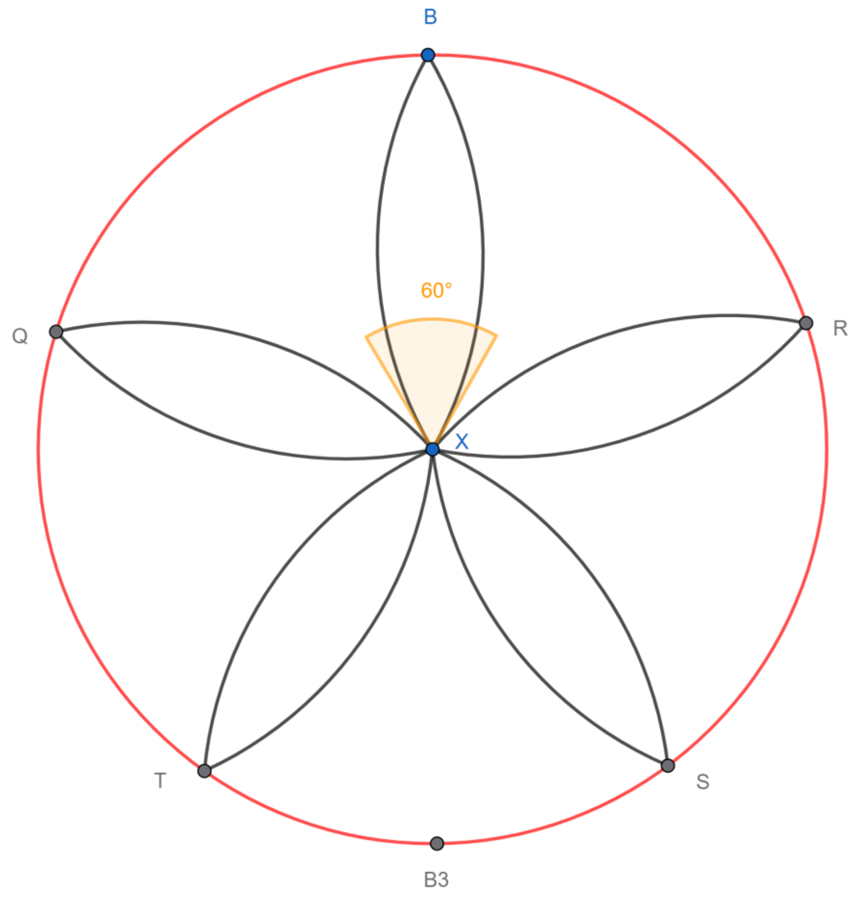
4e pétale

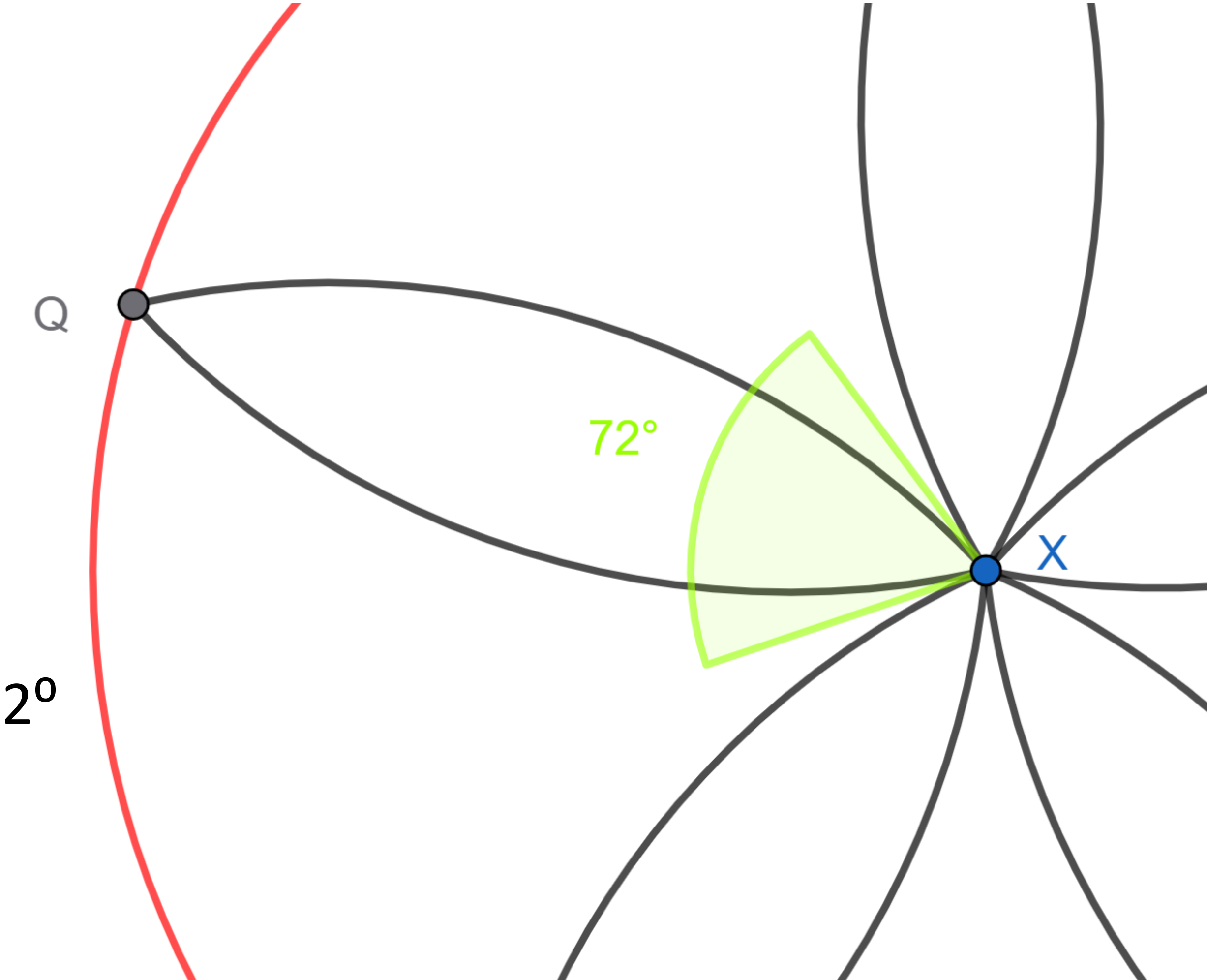


Et voilà!

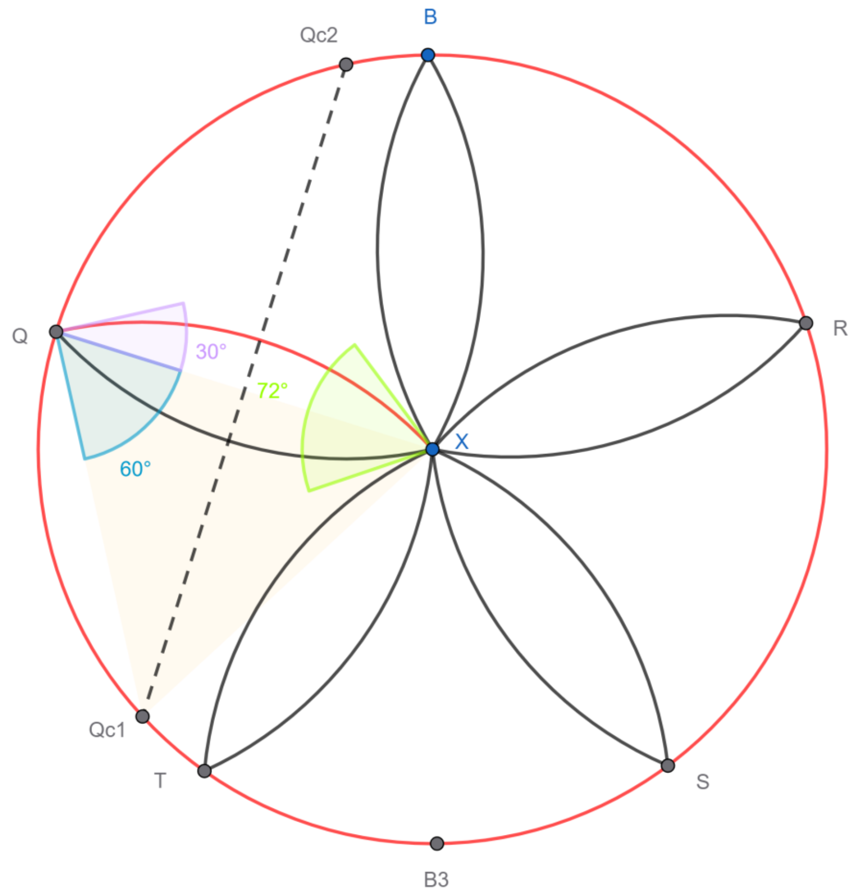
Oui, mais!...

les pétales partent du centre avec une ouverture toujours à 60⁰ puisqu'on les a construits sur la base des triangles équilatéraux



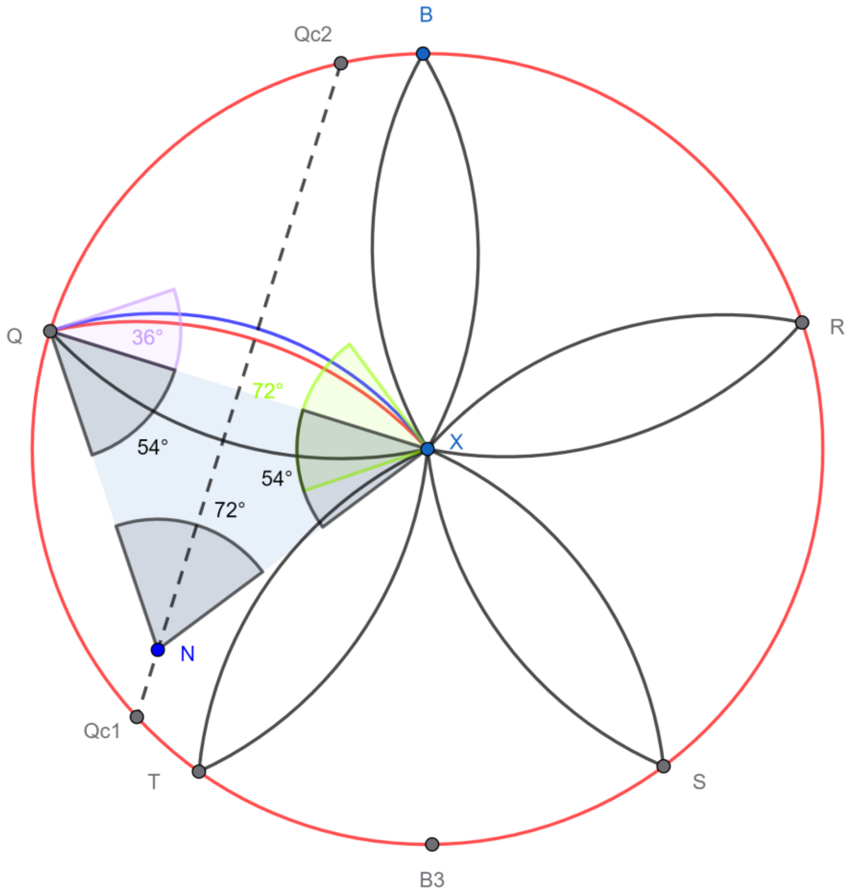


Les puristes préféreraient une ouverture de 72⁰
Et les pétales partiraient du centre
"collés" les uns aux autres!



Nous allons voir comment “donner” plus de courbure à l‘arc rouge pour que le 30º devienne 36º

Ainsi, l’ouverture qui était à 60º passera à 72º



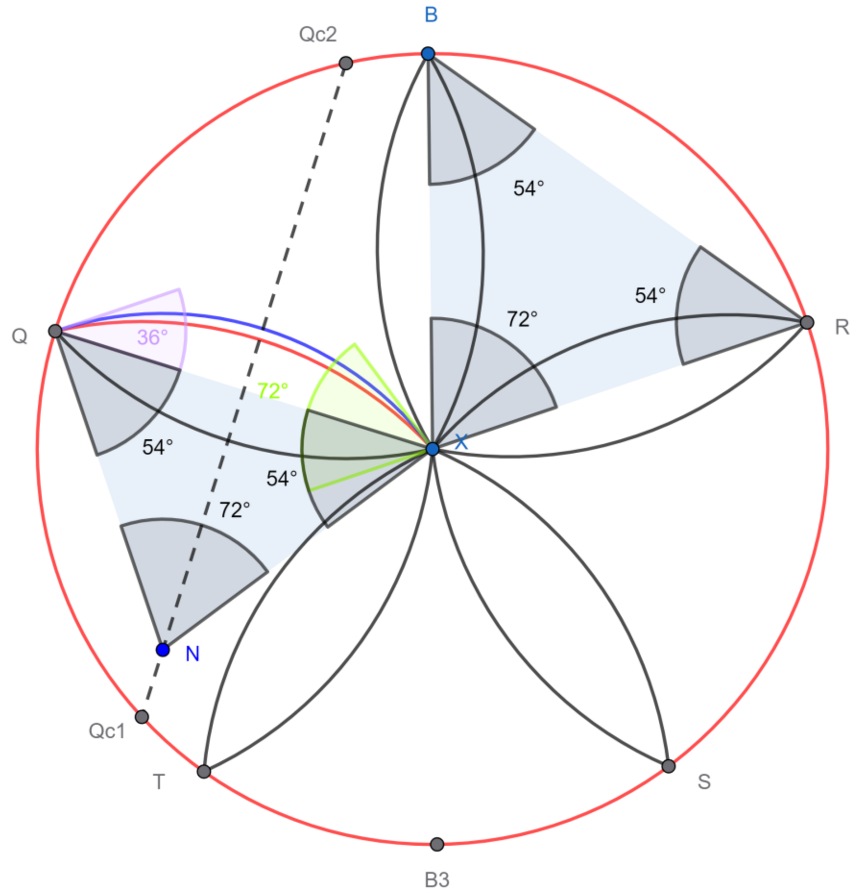
En “montant” le centre de l’arc le long de la médiatrice, on augmente la courbure…

Comme l’arc bleu!

Et regardez les angles…

54º - 54º - 72º

Ça ne vous rappelle rien?



Eh oui… le triangle au centre qui délimite un cinquième du cercle!

Donc les 2 triangles sont semblables et

$$\frac{[QN]}{[QX]} = \frac{[BX]}{[BR]}$$

Mais [QX] = [BX] = 1

Donc $[QN]= \frac{1}{\gamma}$

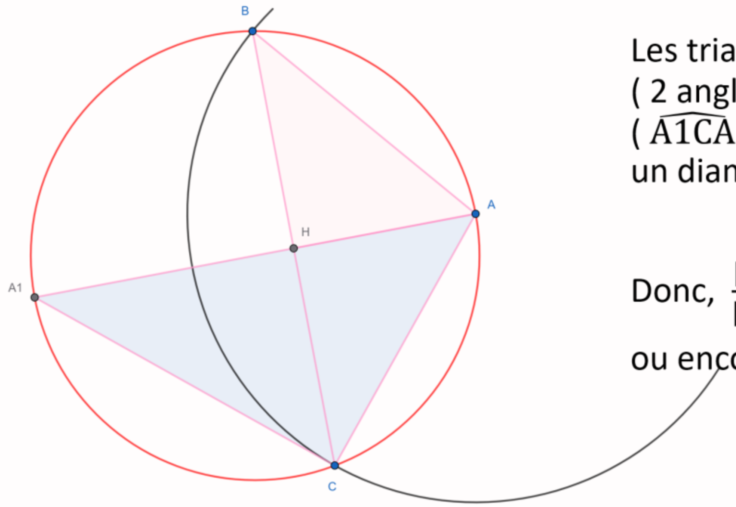
Pour dessiner les pétales de puriste,

Il “suffit” donc de construire les centres des arcs à la distance $\frac{1}{\gamma}$ du centre et du bout.

Reste à construire $\frac{1}{\gamma}$!

Heureusement, on se souvient qu'on a démontré une "propriété des triangles isocèles qui lie la longueur des côtés égaux, cette hauteur et le rayon du cercle dans lequel le triangle est inscrit"…

$$\text{rayon} = \frac{[AB] \times [AC]}{2 \times [AH]}$$



Les triangles bleu clair et rose sont semblables
(2 angles égaux: $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$ et $\widehat{BHA} = \widehat{A1CA}$)
($\widehat{A1CA}$ est droit car un côté du triangle A1CA est un diamètre)

Donc, $\frac{[AB]}{[AH]} = \frac{[A1A]}{[AC]}$

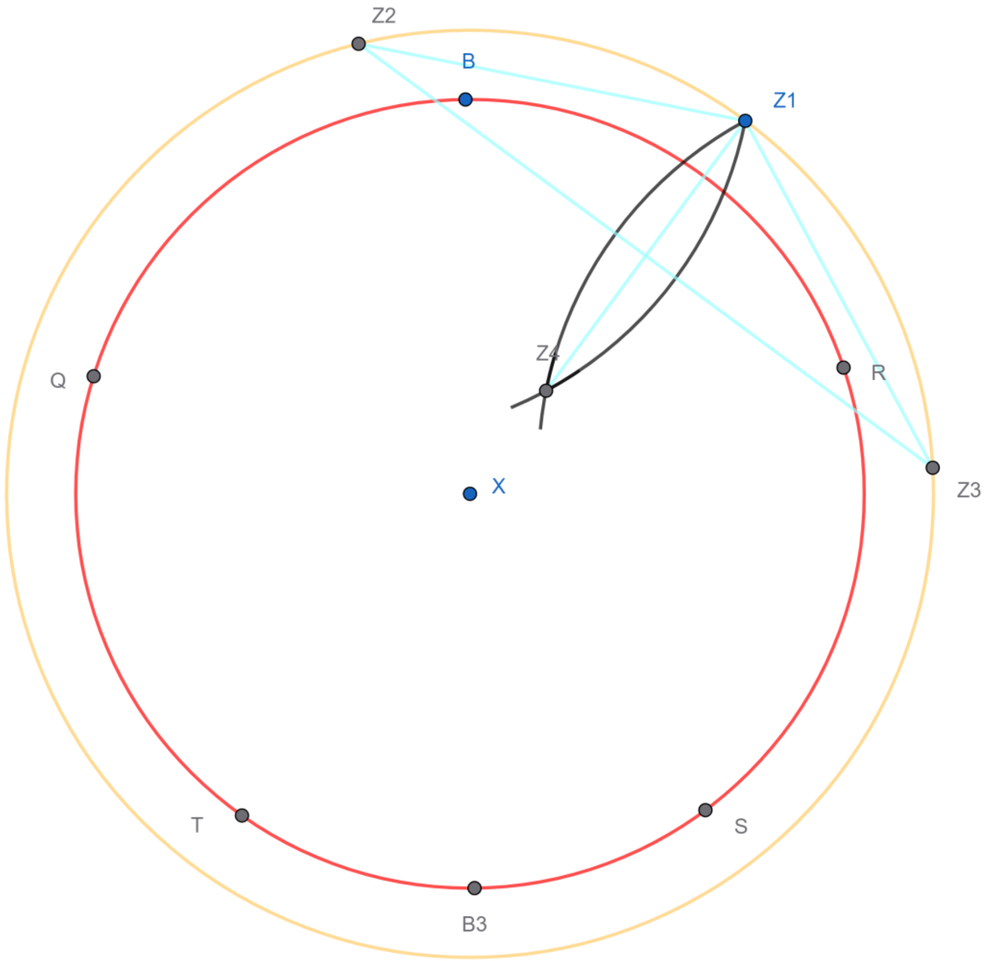
ou encore, [AB] x [AC] = 2 x rayon x [AH]

$$\text{rayon} = \frac{[AB] \times [AC]}{2 \times [AH]}$$

on peut construire un cercle dont le rayon vaut γ, inscrire un triangle isocèle dont les côtés égaux valent 1 et on aura:

$$\gamma = \frac{1 \times 1}{2 \times [AH]}$$

Ou encore $2 \times [AH] = \frac{1}{\gamma}$



On choisit le point Z1 sur
le cercle jaune de rayon γ

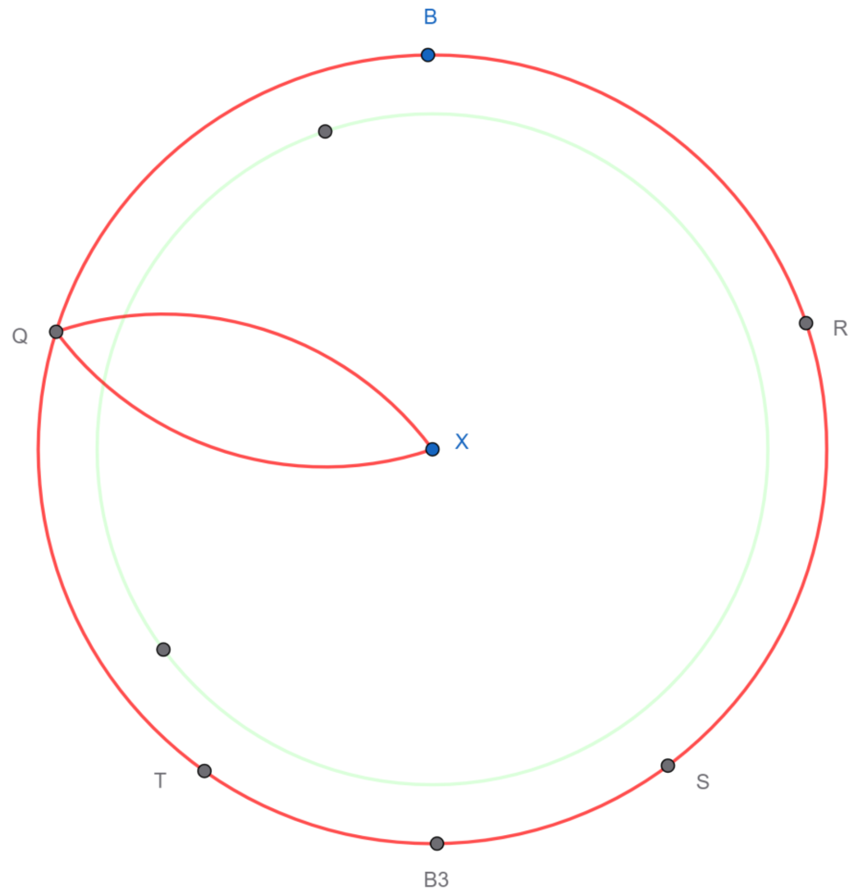
On reporte le rayon du cercle rouge
de part et d'autre de Z1

Ce qui donne Z2 et Z3

On trouve Z4 à l'autre intersection
des cercles de centre Z2 et Z3
passant par Z1

Et [Z1Z4] est la longueur $\dfrac{1}{\gamma}$

Appelons la γ'

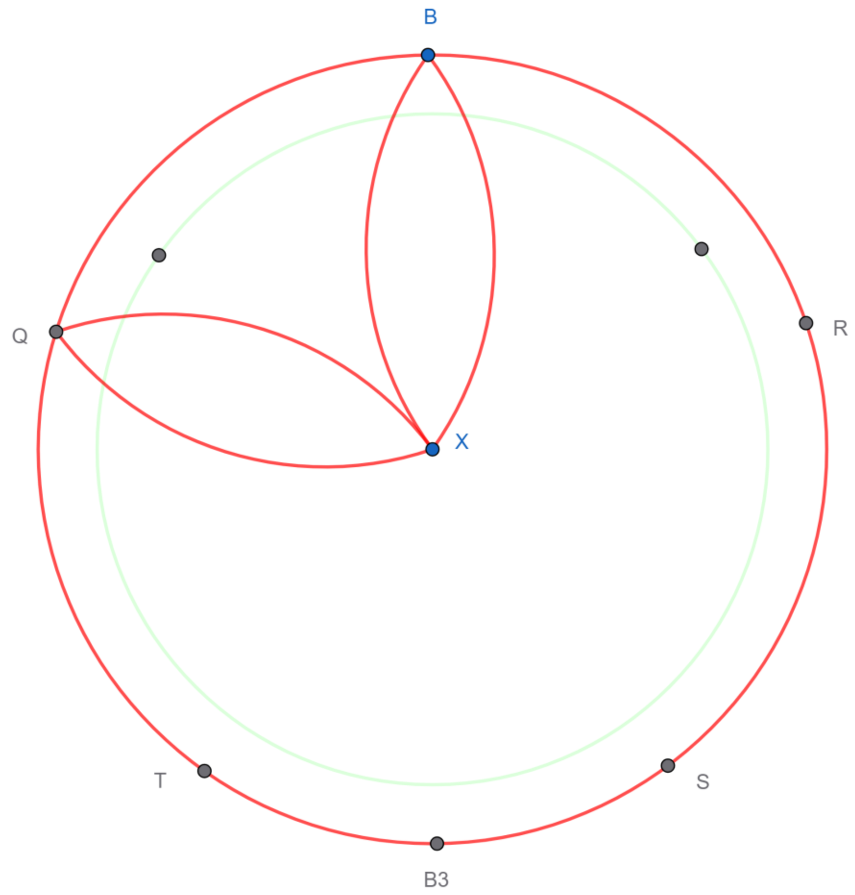


On trace le cercle vert clair
de rayon γ'

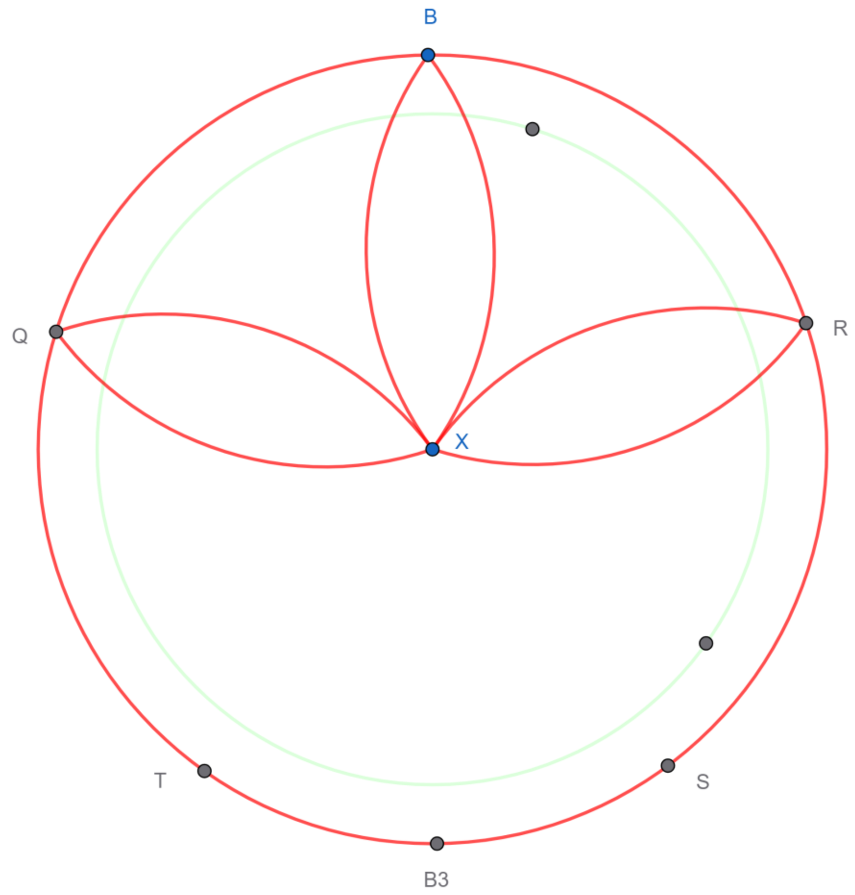
On trouve les 2 points où le cercle
vert clair coupe celui de centre Q
et de rayon γ'

Ce sont les centres des 2 arcs
qui forment le premier pétale!

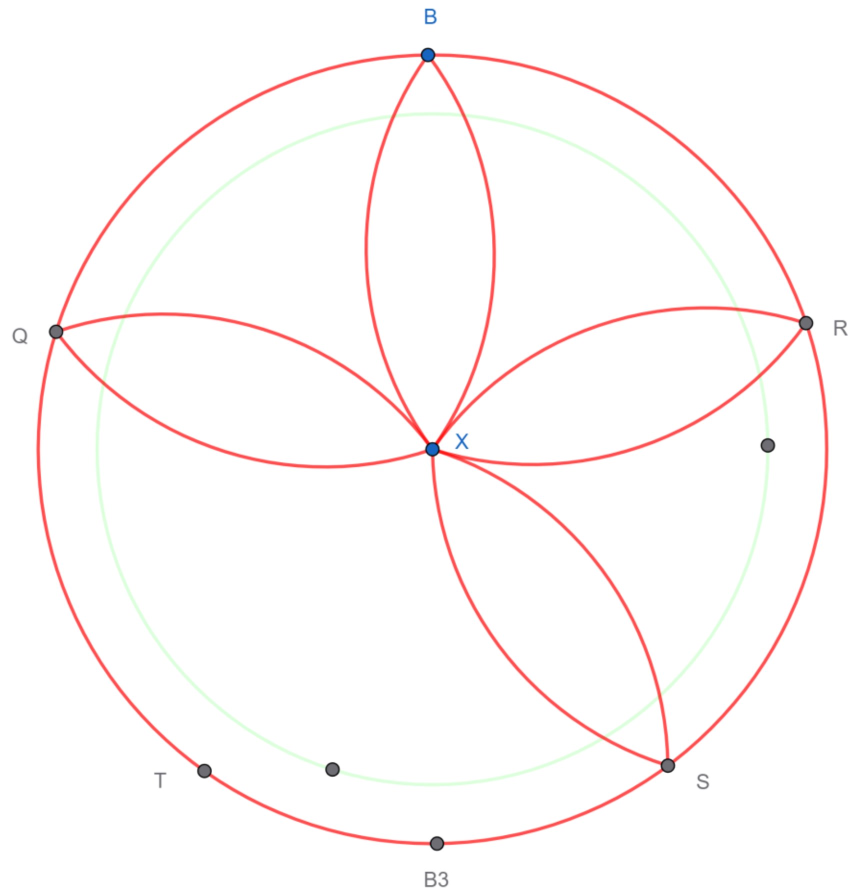
Avec B on trouve le 2e



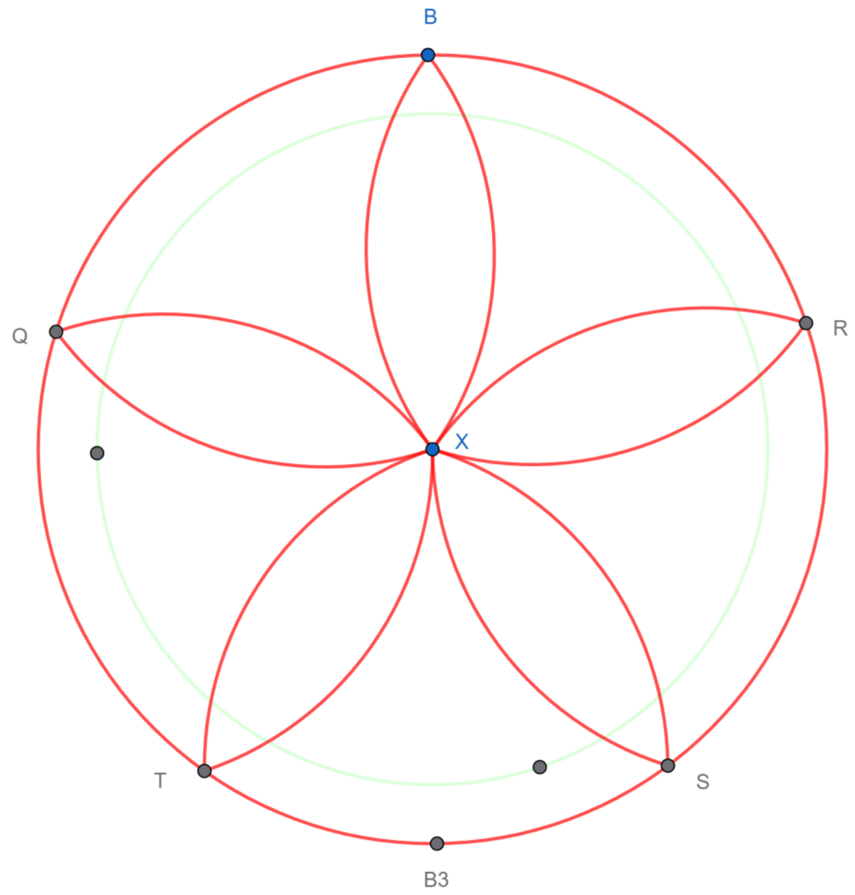
Avec R on trouve le 3e

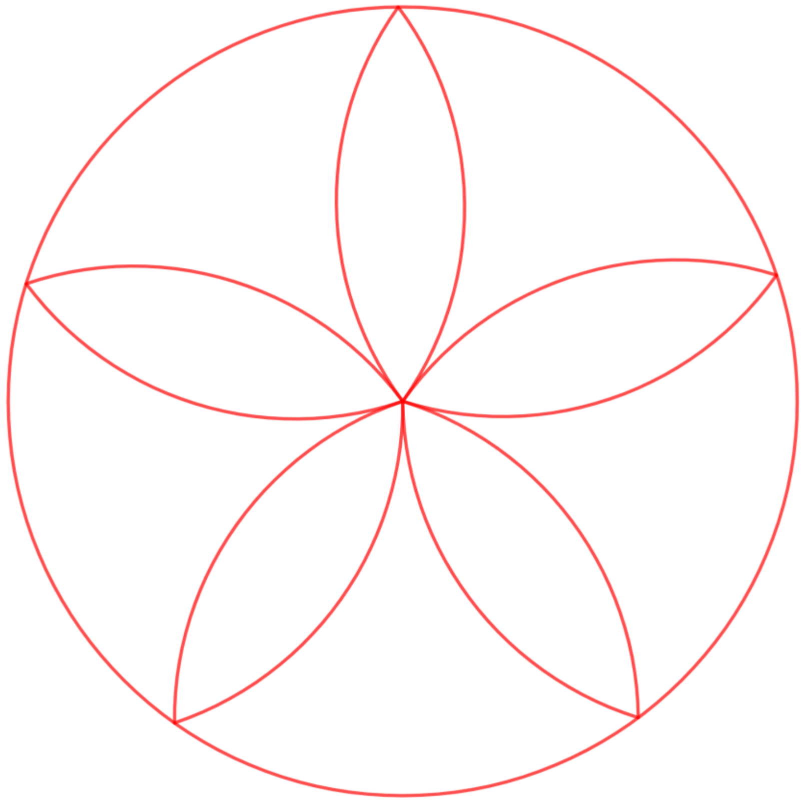


Avec S on trouve le 4e

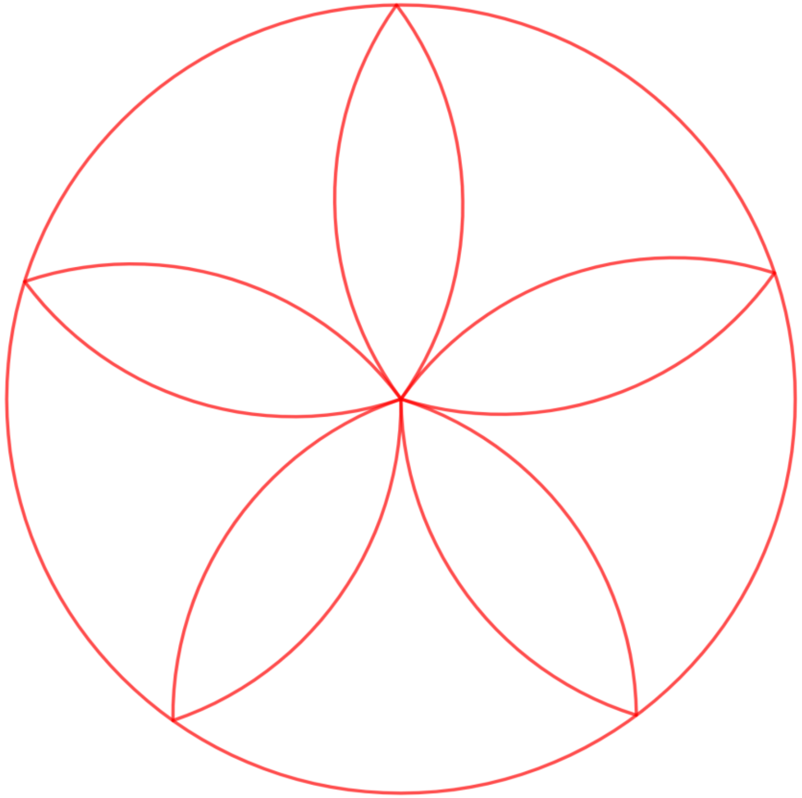


Et avec T on trouve le 5e!

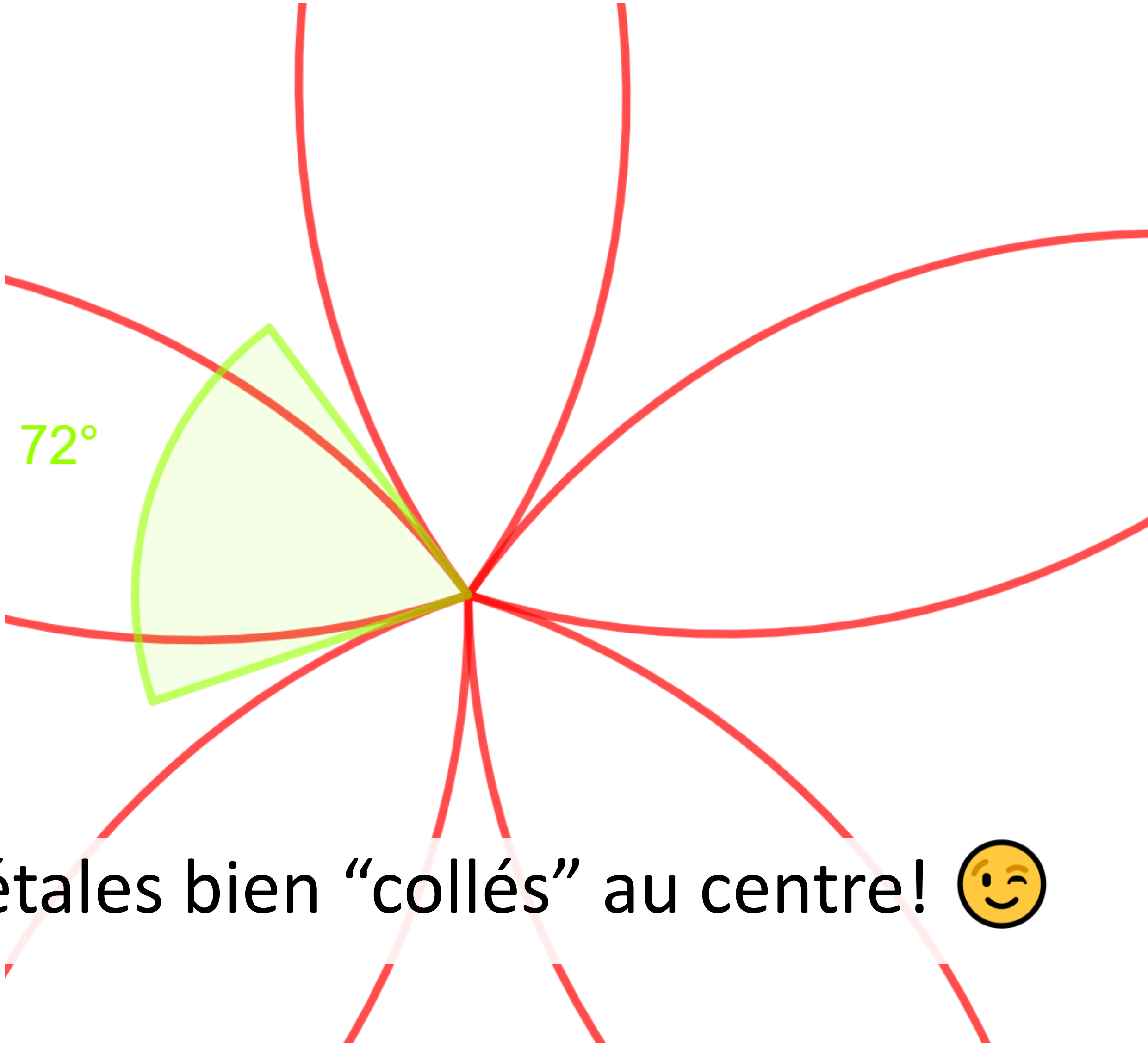




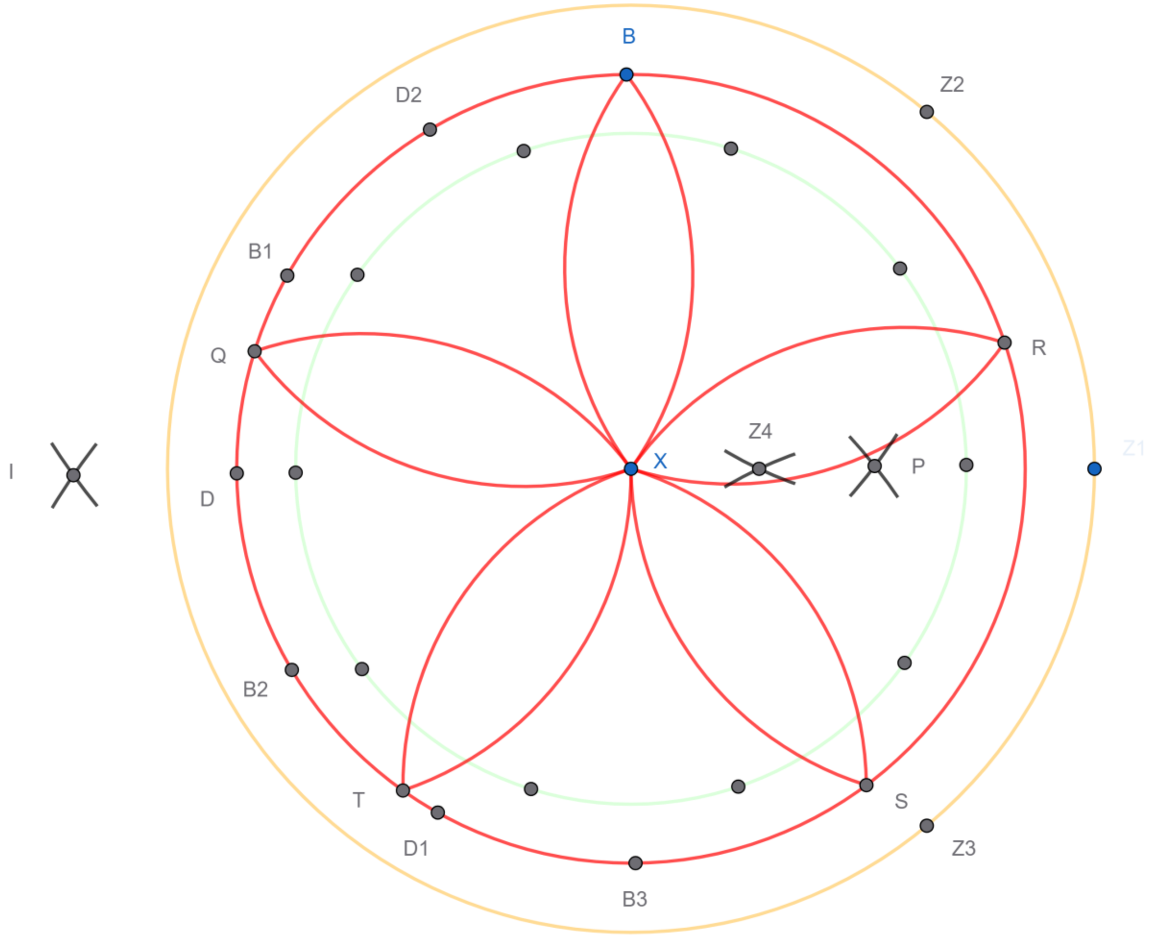
Et voilà notre belle rosace à 5 pétales



Et voilà notre belle rosace à 5 pétales



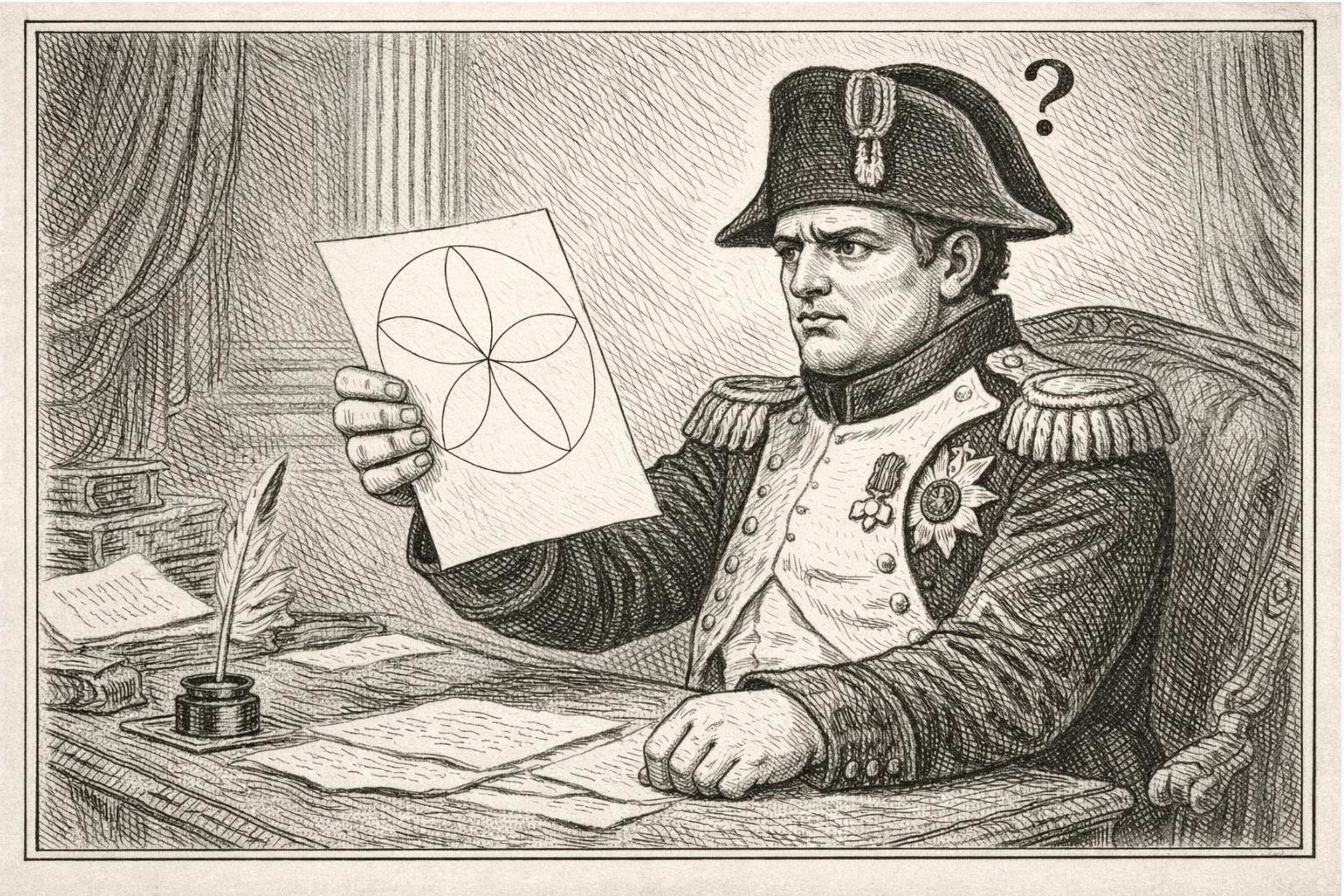
Avec les pétales bien “collés” au centre! 😉

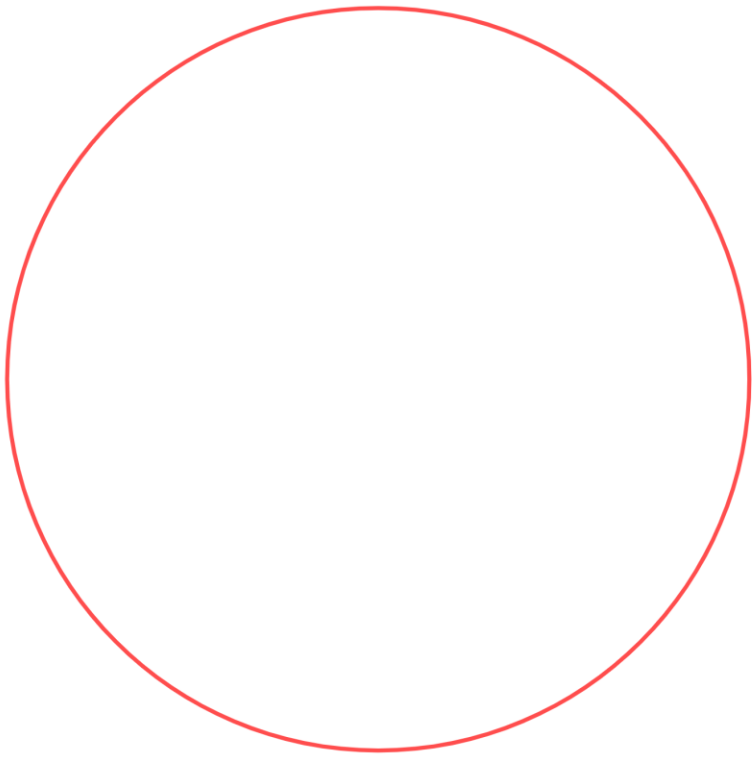


Il nous aura fallu donner
30 coups de compas avec
6 ouvertures différentes et
déterminer 26 points,
alors que 7, 1 et 7 respectivement
suffisent pour la rosace classique
à 6 pétales!

Mais quel beau résultat! 😉

Bon, et Napoléon alors?



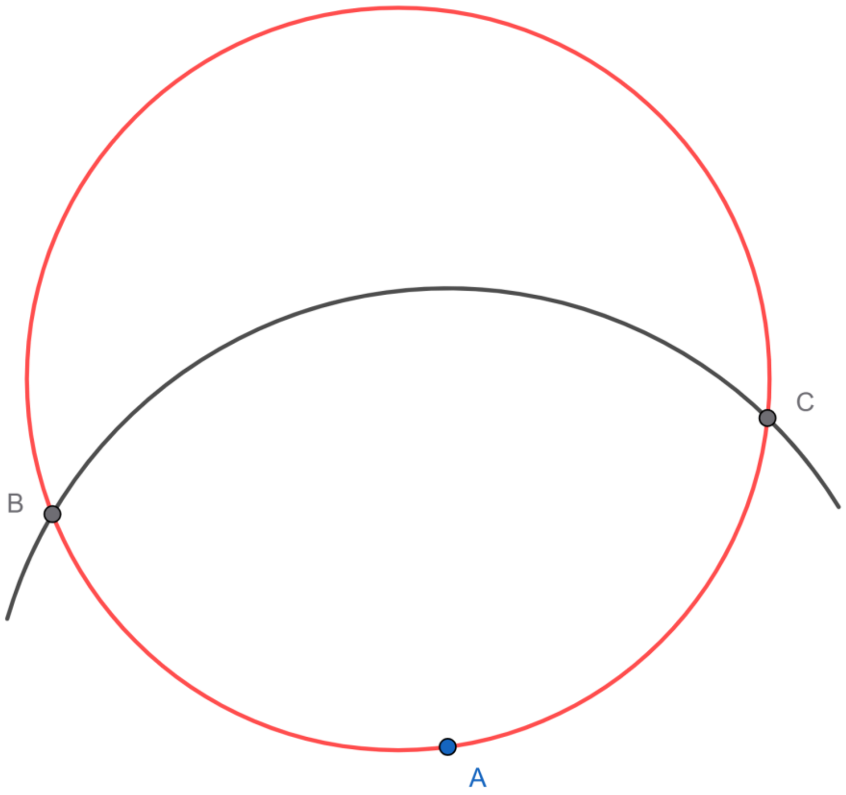


Napoléon avait un goût certain pour les mathématiques et, à son retour de la campagne d’Italie a surpris en montrant comment construire au compas seul le centre d'un cercle donné.

Ce qui sera nommé par la suite le “Problème de Napoléon”!

On sait qu’il a rencontré en Italie Lorenzo Mascheroni et qu’ils ont beaucoup échangé.

Nul doute que les travaux de l’Italien ont eu une influence 😉

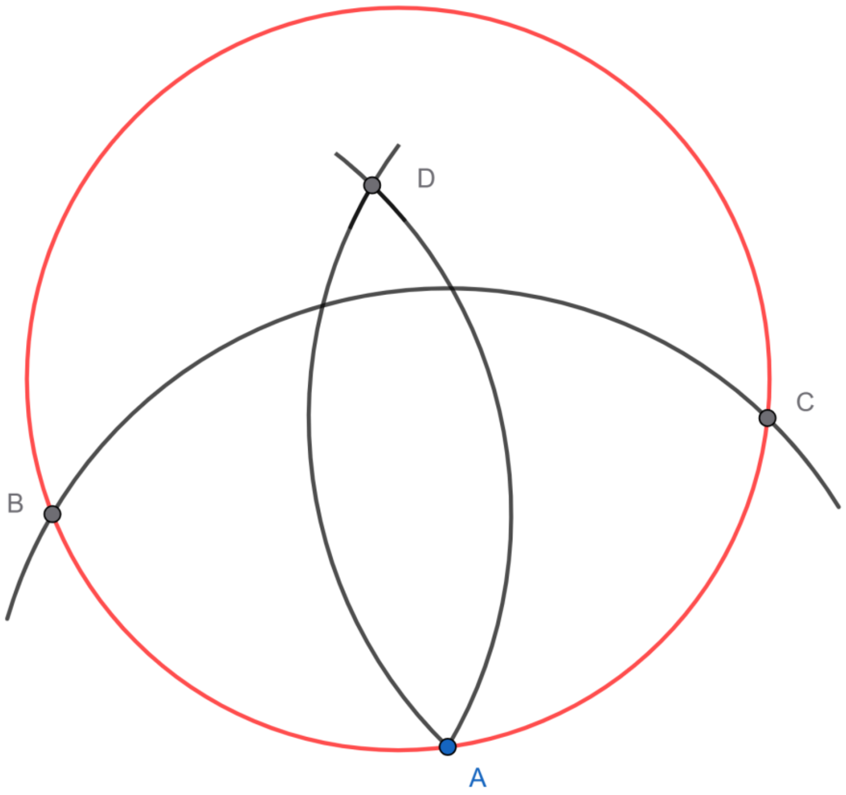


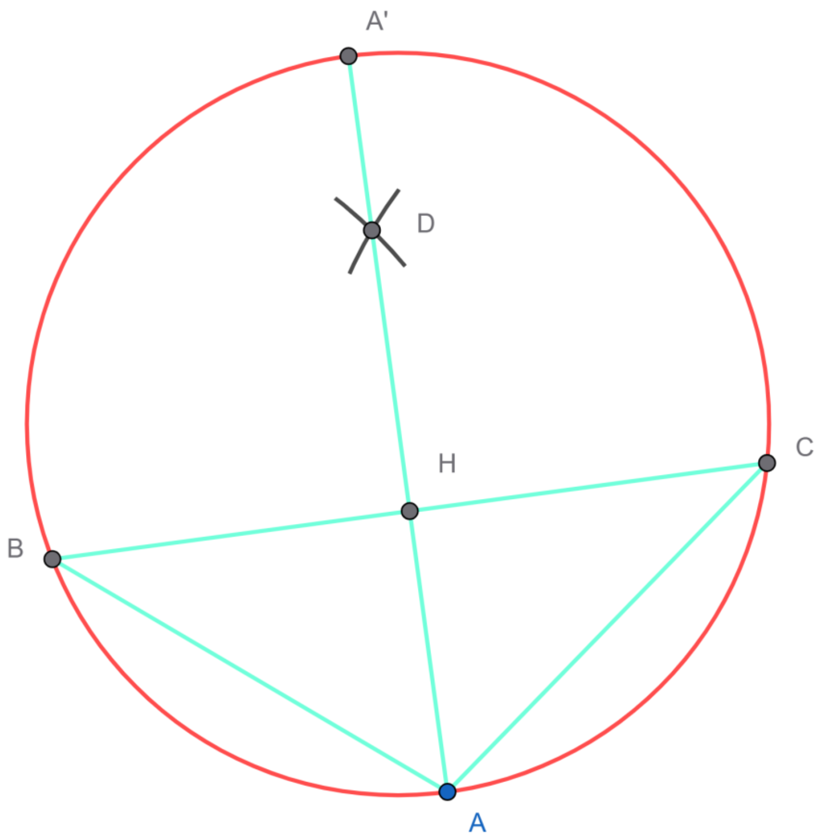
Voici la méthode:

on choisit un point A sur le cercle et on trace un arc de cercle avec un rayon quelconque mais plus petit que le diamètre du cercle… Ça nous donne les points B et C…

Et on trouve D à l'autre intersection des cercles de centre B et C passant par A

(on garde l'ouverture du compas)



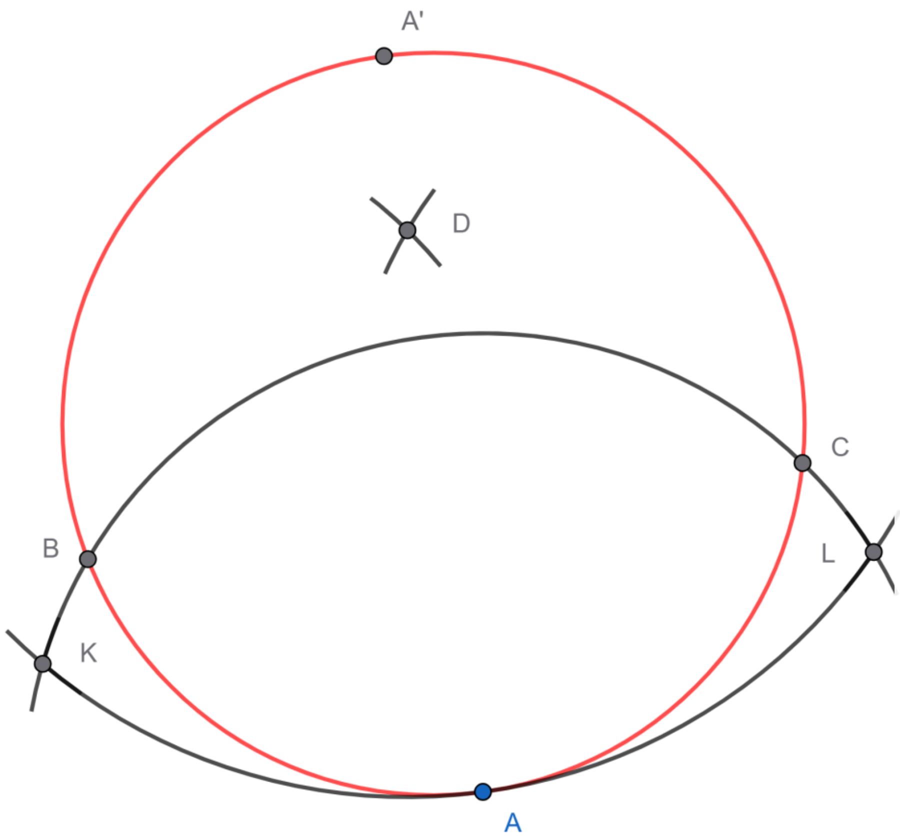


Surprise! on retrouve le triangle isocèle inscrit dans le cercle et sa fameuse propriété

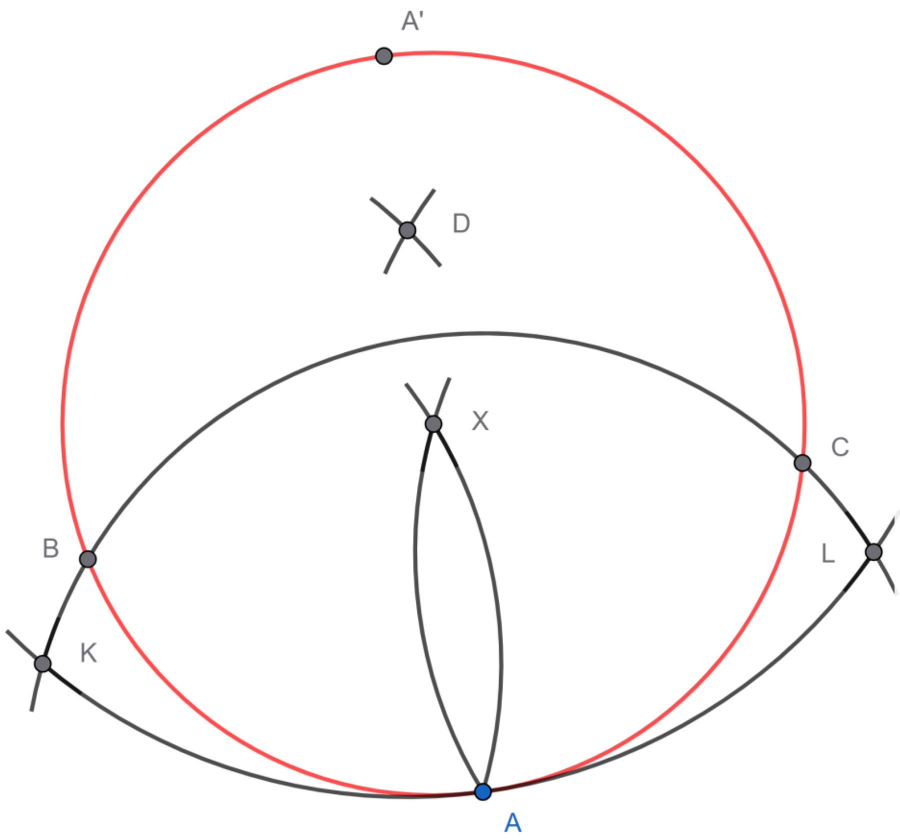
$$\text{rayon} = \frac{[AB] \times [AC]}{2 \times [AH]}$$

Ou aussi

$$\text{rayon} = \frac{[AB] \times [AC]}{[AD]}$$

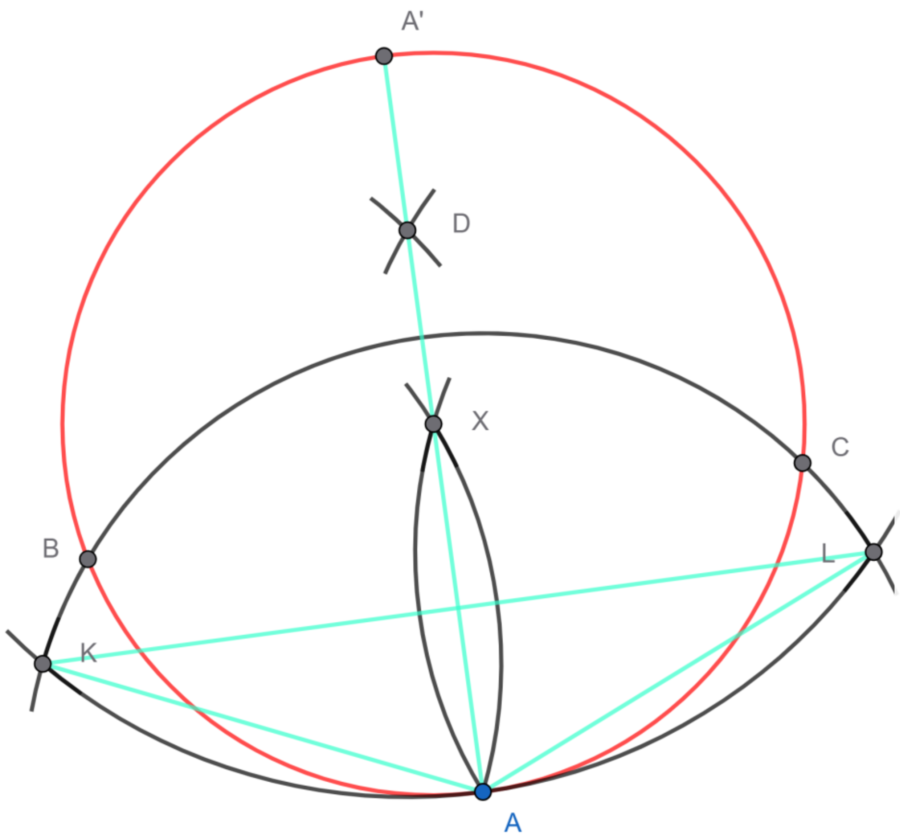


Avec le centre D on trace
un arc de cercle passant par A
et qui coupe l’arc précèdent
aux points K et L



Et on trouve X à l'autre intersection des cercles de centre K et L passant par A

(on garde l'ouverture du compas)



Et voilà un nouveau triangle isocèle inscrit cette fois dans le cercle dont on ne voit que le nouvel arc mais dont le rayon est [AD]

On a donc $[AD] = \dfrac{[AK] \times [AL]}{[AX]}$

Ou encore $[AX] = \dfrac{[AK] \times [AL]}{[AD]}$

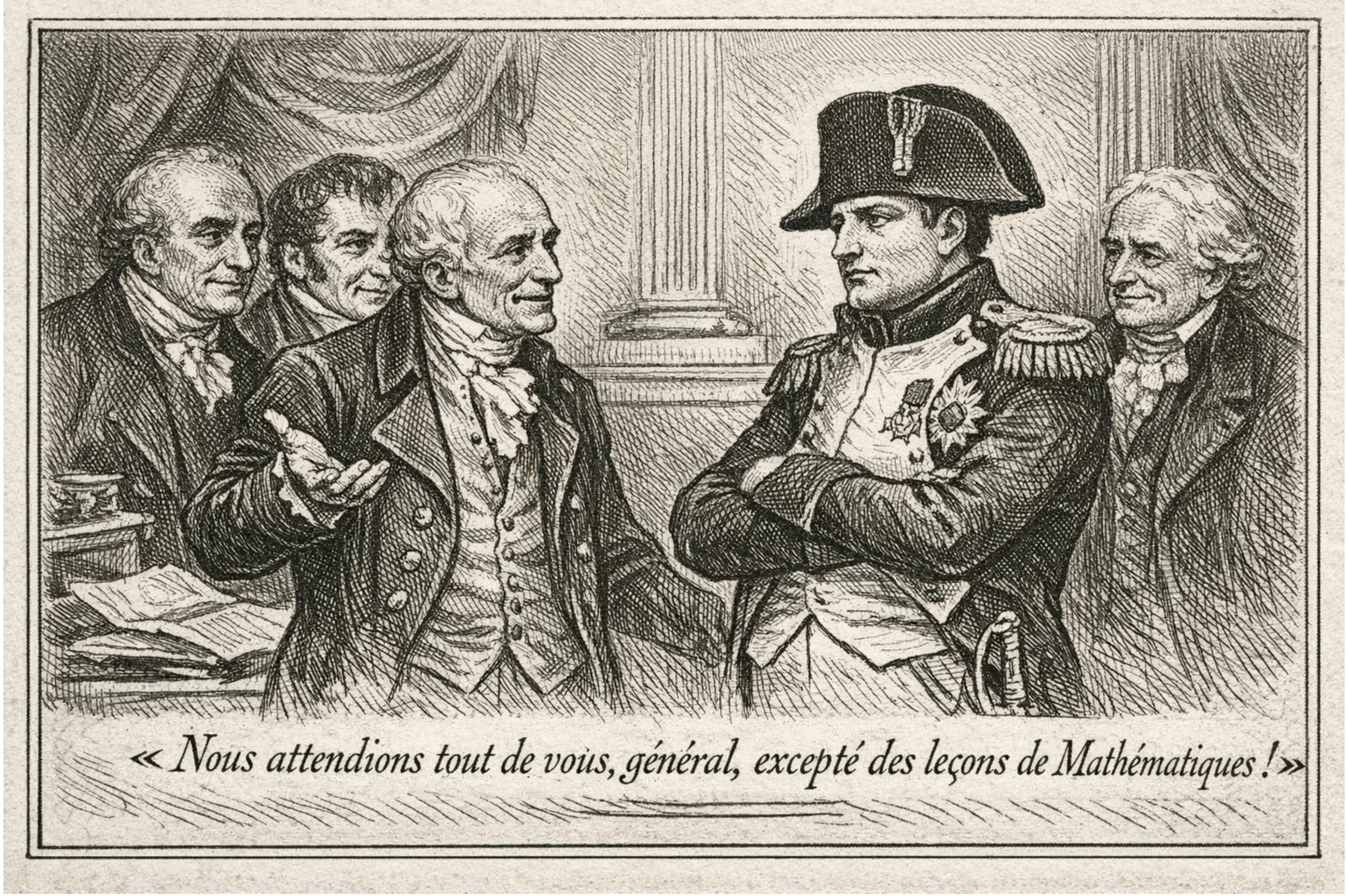
Mais [AB], [AC], [AK] et [AL] sont tous égaux

Et on avait $\text{rayon} = \dfrac{[AB] \times [AC]}{[AD]}$

Donc $\text{rayon} = \dfrac{[AB] \times [AC]}{[AD]} = \dfrac{[AK] \times [AL]}{[AD]} = [AX]$

Donc [AX] est le rayon, et X est le centre…

Bravo Napoléon!!!



Pierre-Simon de Laplace, 21 frimaire an VI (11 décembre 1797)